



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS
Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TESIS DOCTORAL

MODELOS DE FRACTURA DÚCTIL EN
CONDICIONES ESTÁTICAS Y
DINÁMICAS

AUTORA: GUADALUPE VADILLO MARTÍN

DIRECTOR: Prof. Dr. D. JOSÉ FERNÁNDEZ SÁEZ

Leganés, 2007

TESIS DOCTORAL

MODELOS DE FRACTURA DÚCTIL EN CONDICIONES
ESTÁTICAS Y DINÁMICAS

Autora: Guadalupe Vadillo Martín

Director: Prof. Dr. D. José Fernández Sáez

Firma del Tribunal calificador

Presidente:

Vocal:

Vocal:

Vocal:

Secretario:

Calificación:

Leganes, de de 2007

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer al Profesor D. José Fernández Sáez toda la implicación, disposición, entusiasmo y dedicación que me ha demostrado en todo momento y que ha sido fundamental en la realización de la tesis.

A D. Ramón Zaera, por facilitarme sus trabajos, los cuales han servido de base para muchos de mis desarrollos y por ofrecerme su ayuda siempre que la he necesitado.

Al profesor Viggo Tvergaard, por las aportaciones de gran valor conceptual realizadas a esta tesis y por la directa supervisión del capítulo de cavitación, además de por la hospitalidad y humanidad demostrada durante mi estancia en la Universidad Técnica de Dinamarca (DTU)

A D. Carlos Navarro Ugena, por sus ánimos y por ofrecerme la oportunidad de trabajar en el departamento.

Al profesor Jonas Faleskog, del Royal Institute of Technology (Stockholm), y a los profesores Jinkook Kim y Xiaosheng Gao, de la Universidad de Akron (USA), por ofrecerme información detallada acerca de algunos aspectos de simulación numérica.

A todos mis compañeros de departamento, y en especial a David Fernández por sus sugerencias, a Jorge López Puente por su soporte informático, a Sergio Puerta por su ayuda en el laboratorio, y a mis compañeros de despacho Carlos y Rolando.

Al Ministerio de Educación y Ciencia, por la financiación del proyecto *Implementación numérica de modelos de comportamiento de materiales metálicos avanzados para diseño de sistemas de absorción de energía en choques* (DPI2005-06769), y a la Comunidad Autónoma de Madrid y a la Universidad Carlos III, por la financiación del proyecto *Estructuras ligeras para absorción de energía y protección contra impacto* (UC3M-IME-05-054).

Y a mi familia y amigos, por todo su apoyo y cariño.

RESUMEN

En esta tesis se han abordado algunos problemas de simulación numérica del comportamiento de materiales cuyos micromecanismos de fractura están regidos por la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos. Este tipo de fenómenos aparecen en muchas aplicaciones de ingeniería como son los procesos de fabricación por conformado y corte, el análisis del comportamiento frente a choque de estructuras de vehículos ligeros (automóviles, helicópteros), la predicción de la propagación de fisuras en paneles de pequeño espesor, típicos en la industria aeronáutica, el diseño de protecciones contra impacto balístico, entre otros.

En particular, se ha propuesto un algoritmo consistente para integrar las ecuaciones constitutivas de materiales de Gurson aplicable a problemas termoviscoplasticos, teniendo en cuenta la influencia de la velocidad de deformación y la temperatura en el comportamiento.

También se ha formulado una variante del modelo de Gurson considerando que algunos parámetros del mismo no son constantes, sino dependientes de la triaxialidad del campo tensional. Se ha desarrollado el correspondiente algoritmo de integración de las ecuaciones de este modelo modificado y, en este caso, se ha aplicado a problemas estáticos.

Finalmente, se ha aplicado el modelo de Gurson para analizar la influencia de la porosidad inicial en las inestabilidades por cavitación en metales dúctiles.

Los algoritmos desarrollados se han implementado en códigos comerciales de elementos finitos, se ha comprobado su funcionamiento y se han validado con resultados experimentales.

ABSTRACT

In this thesis, some problems about numerical simulation of the mechanical behaviour of materials whose fracture mechanisms are related to the nucleation, growth and coalescence of voids have been analyzed. This kind of analysis must be performed in many engineering applications like metal forming and cutting, light vehicles structures (automobiles, helicopters) under crashing, crack growth in thin panels, typical in the aircraft industry, high-speed impact on metallic armours and others.

In particular, a consistent integration algorithm of Gurson's constitutive equations considering strain rate and thermal effects has been developed.

Also, a modified GTN model that considers that some parameters of the model are no constant but dependent of stress state has been formulated.

Finally, the influence of the porosity on cavitation instabilities in metallic materials has been analyzed. In previous work, this kind of instabilities has been predicted considering only one void contained in an unbounded solid.

The developed algorithms have been implemented in a Finite Element commercial code and they have been validated with experimental results.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Contenido de la tesis	4
1.4. Aportaciones originales de la tesis	5
2. MODELOS DE ROTURA DÚCTIL	7
2.1. Introducción	7
2.2. Mecanismos de fractura dúctil	7
2.3. Nucleación de microvacíos	9
2.4. Crecimiento de Microvacíos	11
2.4.1. El modelo de McClintock	11
2.4.2. El modelo de Rice y Tracey	12
2.5. Coalescencia de microvacíos	15
2.6. El modelo de Gurson y sus extensiones	16
2.7. Modelos basados en la Mecánica del Daño	22
2.8. Problemas de cavitación en sólidos	23

2.9. Recapitulación	29
3. MODELO DE GURSON PARA PROBLEMAS TERMOVISCOPLÁSTICOS	31
3.1. Introducción	31
3.1.1. Cinemática de sólidos deformables	32
3.2. Ecuaciones constitutivas	34
3.3. Integración consistente	41
3.3.1. Tratamiento del problema en grandes deformaciones	42
3.3.2. Discretización de las ecuaciones diferenciales	43
3.3.3. Resolución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales	48
3.4. Definición del Jacobiano	52
3.5. Implementación en ABAQUS	56
3.6. Resultados numéricos	58
3.7. Comparación con resultados experimentales	68
4. MODELO DE GURSON CON PARÁMETROS DEPENDIENTES DE LA TRIAXIALIDAD	75
4.1. Planteamiento del problema	75
4.2. Variación de los parámetros de Gurson con la triaxialidad y la porosidad inicial	76
4.3. Modelo con parámetros variables	78
4.4. Validación del modelo con análisis basados en celdas unitarias	80
4.4.1. Formulación del problema	80
4.4.2. Métodos de Implementación numérica para triaxialidad constante	84

4.4.3. Solución numérica para triaxialidad variable	91
4.4.4. Implementación en ABAQUS. Subrutina MPC	92
4.4.5. Resultados numéricos	93
4.5. Comparación con resultados experimentales	104
4.5.1. Resultados experimentales	104
4.5.2. Simulación numérica	107
5. INFLUENCIA DE LA POROSIDAD EN LA CAVITACIÓN EN METALES DÚCTILES	113
5.1. Introducción	113
5.2. Formulación del problema	116
5.3. Método numérico	119
5.4. Resultados	120
6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	129
6.1. Conclusiones	129
6.2. Trabajo futuro	130
Bibliografía	143
ANEXOS	143

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1. Motivación

En muchas aplicaciones de ingeniería se requiere el estudio de problemas de fractura dúctil, tanto en condiciones estáticas como dinámicas. Es bien sabido que la rotura dúctil de materiales metálicos no se puede caracterizar con propiedades dependientes únicamente del material, sino que éstas pueden depender también de la geometría a través del campo tensional. Así, por ejemplo, se sabe que la deformación de fractura de probetas entalladas de aceros dúctiles es dependiente de la triaxialidad del campo tensional presente en el cuello de la entalla. Una de las vías alternativas para abordar el problema consiste en analizar los micromecanismos de fractura que operan en cada caso y cuantificar su efecto en el proceso de deformación y rotura a través de ecuaciones constitutivas adecuadas. Con ello se intenta determinar cómo se degrada (daña) el material en función del estado local de tensiones y deformaciones.

Por otra parte, cada vez son más los procesos de ingeniería avanzada cuyo estudio requiere el conocimiento y modelización de los procesos de deformación y rotura de materiales dúctiles en condiciones dinámicas. Ejemplos de estos problemas son los procesos de fabricación por conformado y corte [1],[2],[3], el análisis del comportamiento frente a choque de estructuras de vehículos ligeros [4], (automóviles, helicópteros), la predicción de la propagación de fisuras en paneles de pequeño espesor [5] típicos en la industria aeronáutica, el diseño de protecciones contra impacto balístico, etc ...

Una de las líneas de investigación del grupo en el que se ha realizado esta tesis doctoral está relacionada con el análisis del comportamiento de elementos estructurales

para absorción de energía. Este tipo de elementos forman parte de estructuras ligeras de automóviles, por ejemplo. Cuando se analiza el comportamiento estructural de elementos sometidos a cargas impulsivas como las que se producen en una colisión, hay que tener en cuenta una serie de fenómenos como son:

- La aparición de grandes deformaciones, desplazamientos y rotaciones en los elementos de los sólidos involucrados en el fenómeno.
- Elevadas deformaciones plásticas (irreversibles).
- La presencia de efectos inerciales.
- La sensibilidad de las propiedades del material a la velocidad de deformación.
- El deterioro progresivo del material, durante su deformación y antes de su rotura.
- Aumento local de temperatura por disipación de energía debida a la plastificación del material (por la rapidez con la que se produce el fenómeno, se puede considerar que esa transformación se produce en condiciones adiabáticas), que a su vez puede modificar localmente las propiedades mecánicas del material.

Para el diseño de este tipo de estructuras de absorción de energía es necesario basarse en análisis numéricos precisos que permitan predecir el comportamiento de los elementos estructurales sin necesidad de recurrir a campañas experimentales muy extensas, ya que éstas son muy costosas.

Por tanto, para responder a estas cuestiones dentro del contexto de la Mecánica de Medios Continuos, es necesario disponer de ecuaciones constitutivas capaces de recoger adecuadamente el comportamiento del material, así como de algoritmos eficientes de integración de dichas ecuaciones constitutivas.

En la actualidad, dos son las tendencias más extendidas en cuanto a la utilización de modelos de deformación y rotura de materiales dúctiles: la que se basa en planteamientos micromecánicos (modelo de material de Gurson-Tvergaard-Neddleman, modelo GTN) y la que se apoya en conceptos de Mecánica de Daño, siendo el modelo de Rousselier uno de los más utilizados de los de este tipo.

Ambos modelos están suficientemente desarrollados para problemas isotermos y estáticos, y existen algunas extensiones de estos modelos a condiciones dinámicas, aunque,

en nuestro conocimiento, dichas extensiones plantean integraciones "no consistentes" de las correspondientes ecuaciones constitutivas, lo cual contribuye a aumentar el coste computacional, de por sí muy elevado en este tipo de problemas.

Por otra parte, se reconoce que algunos de los parámetros del modelo GTN no pueden ser considerados constantes universales, sino que varían con el campo tensional. Sin embargo, no se han abordado estudios sobre las consecuencias que pueda tener este hecho en la utilización del modelo.

Otros problemas relacionados con los procesos de nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos) son los fenómenos de cavitación en sólidos. Este problema consiste, en esencia, en la aparición de una inestabilidad en medios donde existen microvacíos, inestabilidad que puede conducir a la rotura del componente. Estos problemas se han venido estudiando desde hace décadas, pero, sin embargo, existe un campo abierto en lo referido a la influencia de la presencia de microvacíos de pequeño tamaño (situación común en metales) en la aparición de la inestabilidad.

Por lo tanto, tratando de contribuir en esta dirección, esta tesis se plantea alrededor de la modelización numérica, desde la perspectiva de la Mecánica de medios continuos, de fenómenos que involucran la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos, y se ha desarrollado para conseguir los objetivos que se plantean en el siguiente apartado.

1.2. Objetivos

Dentro de los problemas de simulación numérica en el contexto de la Mecánica de medios continuos de fenómenos relacionados con los procesos de nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos, y más en concreto, desde su formulación con modelos micromecánicos como el de Gurson con sus posteriores extensiones, los objetivos generales que se han planteado en esta tesis doctoral son los siguientes:

- Formulación e implementación numérica en un código comercial de elementos finitos de un método de integración consistente de las ecuaciones del modelo GTN aplicable a problemas dinámicos y considerando el efecto de la temperatura (problemas termoviscoplasticos).
- Formulación e implementación numérica en un código comercial de elementos fini-

tos de un método de integración consistente de las ecuaciones del modelo GTN considerando que los parámetros que aparecen en dicho modelo no son constantes, sino que dependen del campo tensional.

- Análisis de la influencia de la porosidad en las inestabilidades de cavitación en metales dúctiles, mediante la utilización del modelo GTN.

1.3. Contenido de la tesis

Esta introducción constituye el primer capítulo de los seis de los que consta la tesis.

En el segundo se presentan algunos conceptos básicos relacionados con los fenómenos y micromecanismos responsables de la fractura dúctil, haciendo hincapié en su consideración desde la perspectiva de la Mecánica de los medios continuos.

El tercer capítulo está dedicado a los estudios llevados a cabo para el desarrollo de un algoritmo de integración consistente de las ecuaciones del modelo de Gurson aplicable a problemas termoviscoplasticos. Se dan los detalles del algoritmo de integración y de su implementación en el código comercial de elementos finitos *ABAQUS*. También se construye el operador tangente consistente con el algoritmo propuesto.

Se continúa en el capítulo 4 con la presentación de un modelo GTN con algunos parámetros dependientes del campo tensional. En este caso se aplica únicamente para condiciones estáticas

El quinto capítulo está dedicado a la aplicación del modelo de Gurson en los análisis de problemas de cavitación en metales dúctiles. Esta parte del trabajo se ha llevado a cabo en la Universidad Técnica de Dinamarca (DTU) bajo la supervisión directa del profesor Viggo Tvergaard.

Las conclusiones de la tesis y los posibles trabajos futuros que se pueden abordar como consecuencia de ésta se exponen en el sexto y último capítulo.

Finalmente se recoge la bibliografía utilizada para la realización de la tesis, así como distintos anexos en los que se muestran detalles específicos del trabajo realizado.

1.4. Aportaciones originales de la tesis

Las aportaciones de la tesis doctoral se recogen en los siguientes puntos:

- Se ha propuesto un algoritmo de integración consistente de las ecuaciones constitutivas de materiales de Gurson en las que se considera la influencia de la velocidad de deformación y la temperatura. En particular se ha desarrollado para el caso de condiciones adiabáticas, condiciones que se cumplen en problemas de impacto de elementos estructurales.
- Relacionado con lo anterior, se ha desarrollado el operador tangente consistente con el algoritmo de integración. Este operador consistente es muy importante para reducir el coste computacional asociado a la resolución de este tipo de problemas cuando el algoritmo de integración se implementa en códigos implícitos de elementos finitos.
- Se ha formulado e implementado numéricamente una variación al modelo GTN en el que se considera que algunos parámetros del modelo no son constantes, sino que dependen del estado tensional.
- Se ha propuesto un método para implementar condiciones de contorno que implican variación de la triaxialidad durante el proceso de carga (estados de carga no proporcionales) en análisis asociados a celdas unitarias.
- Se ha analizado la influencia de la porosidad en las inestabilidades de cavitación en materiales metálicos. Los trabajos sobre cavitación en sólidos analizan la aparición de inestabilidades, considerando el comportamiento de un único microvacío contenido en un medio infinito.

Capítulo 2

MODELOS DE ROTURA DÚCTIL

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos relacionados con los fenómenos y micromecanismos responsables de la fractura dúctil, sobre todo su consideración desde la perspectiva de la Mecánica de los medios continuos. Se aborda el problema de una manera general sin presuponer la presencia de una fisura macroscópica en el sólido. El estudio se centra especialmente en el modelo de Gurson y sus extensiones y se ponen de manifiesto algunos problemas no resueltos con la utilización de este modelo. Esta introducción sirve de base para justificar los objetivos expresados en el capítulo anterior.

2.2. Mecanismos de fractura dúctil

Desde un punto de vista macroscópico, la fractura dúctil se caracteriza porque va precedida de una apreciable deformación plástica y se requiere mayor energía de deformación para provocarla que en el caso de la fractura frágil. En un material dúctil es un fenómeno característico la aparición de un cuello de estricción en una probeta sometida a un esfuerzo de tracción según su eje longitudinal, desarrollándose una importante deformación plástica antes de la rotura. Desde el punto de vista microscópico, la fractura dúctil es consecuencia de la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos.

En las figuras 2.1 y 2.2 se pueden observar los procesos de nucleación y crecimiento progresivo de microvacíos hasta su coalescencia dando lugar a superficies libres (fisuras).

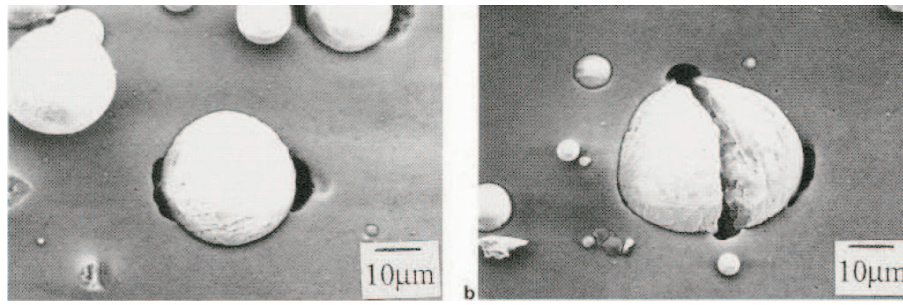


Figura 2.1: Nucleación de microvacíos por decohesión o por rotura de una partícula [6]

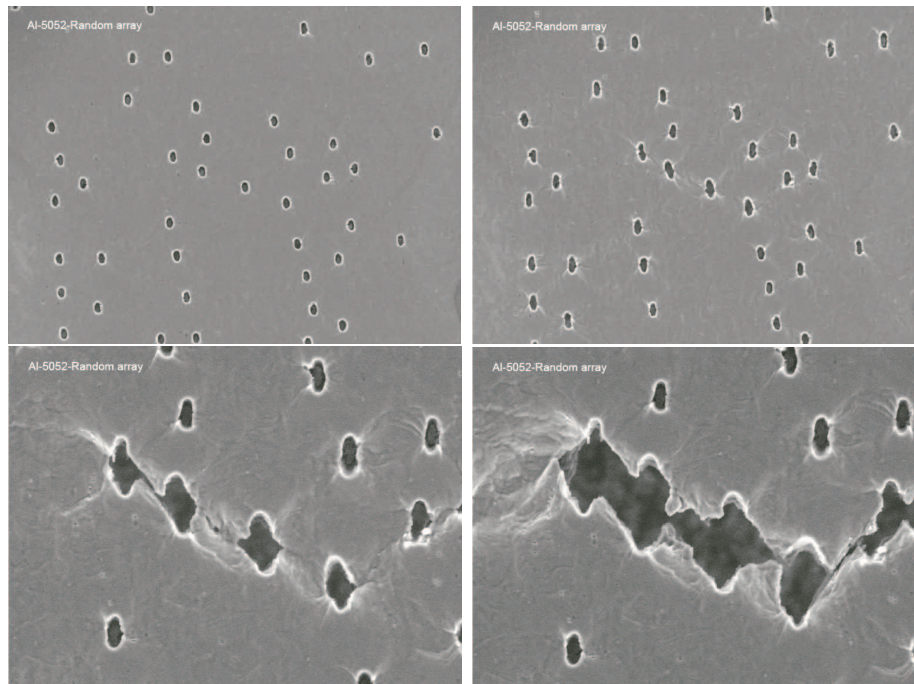


Figura 2.2: Proceso de crecimiento y coalescencia de microvacíos [6]

Para poder analizar cuantitativamente los fenómenos de fractura dúctil, es necesario conocer sus mecanismos responsables. En el trabajo de Van Stone et al. [7] se puede encontrar una excelente revisión de los mecanismos básicos asociados a la fractura dúctil.

Tipper [8] y Puttick [9] fueron los primeros en estudiar en probetas de tracción, usando técnicas metalográficas y microscopía óptica, la aparición de cavidades internas nucleadas en segundas fases, partículas o inclusiones no metálicas.

Rogers [10] estudió la rotura de probetas de tracción de cobre y apuntó que el proceso de fractura en este material ocurre por la formación de huecos que crecen a medida que aumenta la deformación plástica y que terminan coalesciendo para formar una superficie libre (grieta en la zona de sección mínima de la probeta). La rotura de la probeta se

produce con la clásica apariencia copa-cono. La parte plana de la fractura corresponde a la grieta interna, en tanto que la parte correspondiente al cono está motivada por las tensiones de cortadura. Este modo de fractura está fuertemente influido por el estado tensional presente y por la deformación plástica desarrollada, como puso de manifiesto Bridgman [11] en su clásico análisis de la estricción de la probeta sometida a tracción.

Así pues, como ya se ha indicado, la fractura dúctil es el resultado de tres procesos distintos:

- Nucleación de huecos durante la deformación plástica
- Crecimiento de estos huecos
- Coalescencia de los mismos para producir superficies libres y la rotura final

Hay que señalar que estos procesos pueden ocurrir simultáneamente en el material, es decir que mientras ciertos huecos crecen y terminan coalesciendo, se están nucleando nuevos huecos que van "alimentando" el proceso de rotura.

2.3. Nucleación de microvacíos

La nucleación de microvacíos se produce en sistemas que contienen segundas fases, bien por separación de la interfase matriz-partícula bien por rotura de esta última, que, en general, es menos deformable que la matriz (figura 2.1). Cuando la nucleación se produce por la presencia de una sola fase dispersa, la superficie de fractura presenta un aspecto con cúpulas de un tamaño uniforme, mientras que cuando los huecos se nuclean alrededor de partículas de distintos tamaños, aparecen también distintos tamaños de cúpulas en la superficie de fractura. En general, las partículas de mayor tamaño inician la nucleación con bajos niveles de tensión y deformación, y a medida que ésta va aumentando, otras partículas de menor tamaño contribuyen al proceso de fractura.

Los modelos de nucleación de microvacíos se pueden dividir en dos grupos. En el primero de ellos, aplicables al caso de partículas nucleadoras cuyo tamaño es menor de $2\ \mu m$, hay que usar modelos de dislocaciones para calcular la concentración de tensiones en la intercara matriz-partícula. El modelo de dislocaciones de Goods y Brown [12] predice que, para partículas de forma aproximadamente esférica, la nucleación tiene lugar cuando la deformación principal máxima, ε_1 , alcanza un valor crítico ε_{1n} dado por:

$$\varepsilon_{1n} = Kr(\sigma_c - \sigma_m)^2 \quad (2.1)$$

K es una constante del material relacionada con la fracción volumétrica de partículas presentes, r es el radio de la partícula, σ_c es la tensión de cohesión matriz-partícula y σ_m es la tensión hidrostática.

El segundo grupo de modelos se refiere a partículas cuyos diámetros son mucho mayores que $2 \mu m$, donde se puede aplicar formulaciones basadas en la Mecánica de medios continuos para estimar la concentración de tensiones en la intercara matriz partícula. En este grupo se encuentra el modelo de Argon y colset al. ([13], [14]) que establece que se nuclea un microvacío cuando el valor de la tensión de la intercara partícula-matriz $-\sigma_c$ alcanza un valor crítico. El valor de dicha tensión de intercara se define como:

$$\sigma_c = \bar{\sigma} + \sigma_m \quad (2.2)$$

siendo $\bar{\sigma}$ la tensión equivalente de Von Mises y σ_m la tensión hidrostrática.

Tras estudios experimentales, Beremin [15] introdujo una modificación a este modelo definiendo ahora la tensión de intercara como:

$$\sigma_c = \sigma_m + C(\bar{\sigma} - \sigma_Y) \quad (2.3)$$

donde σ_Y es el límite elástico del material y C una constante.

Se puede afirmar, como regla general, que para el caso de partículas pequeñas (menores de $2 \mu m$), la deformación de nucleación está muy influida por el radio de las partículas siendo menor cuánto menor es éste. Por el contrario, en el caso de partículas relativamente grandes (mucho mayores que $2 \mu m$) el tamaño de la partícula no influye en la tensión de nucleación del microvacío.

Por otra parte, los modelos citados sólo tienen en cuenta la separación entre partícula y matriz como causa de nucleación y no contemplan la rotura de partículas o inclusiones, fenómenos también responsables de la generación de microvacíos [16, 17, 18].

Además hay que reconocer que no todas las partículas o inclusiones presentes en el material van a nuclear microvacíos, sino sólo parte de ellas.

En los códigos de cálculo por elementos finitos se utilizan modelos de nucleación que consideran la fracción de partículas nucleadas, f_n , como una variable aleatoria que

que sigue una determinada distribución de probabilidad. Para el caso controlado por deformación plástica, Chu y Needleman [19] propusieron un modelo de nucleación de la forma:

$$df = f_\varepsilon(\bar{\varepsilon}^p) d\bar{\varepsilon}^p$$

$$f_\varepsilon(\bar{\varepsilon}^p) = A = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (2.4)$$

En esta expresión, $\bar{\varepsilon}_N$ representa la media de la distribución normal, s_N la desviación estándar y f_N la amplitud de la distribución.

Para nucleación controlada por tensión, el modelo probabilístico tiene de expresión:

$$df = f_\varepsilon(\bar{\sigma} + \sigma_m) d(\bar{\sigma} + \sigma_m) \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$$

$$f_\varepsilon(\bar{\sigma} + \sigma_m) = B = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\sigma} + \sigma_m - \sigma_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (2.5)$$

En este caso, $\bar{\sigma}_N$ es la media de la distribución, y $\bar{\sigma}$ y σ_m el límite elástico y la tensión hidrostática respectivamente.

La ley de nucleación a utilizar depende en gran medida del material.

2.4. Crecimiento de Microvacíos

2.4.1. El modelo de McClintock

Se entiende por crecimiento de microvacíos el aumento del tamaño de éstos, producido por una fuerte deformación plástica. Se estima que la mayor parte de la energía consumida en el proceso de fractura dúctil corresponde a la fase de crecimiento de huecos.

Diferentes estudios realizados sobre probetas ensayadas a tracción han puesto de manifiesto la gran influencia que tiene el estado tensional en el desarrollo de los microvacíos (Hancock y Mackenzy, [20], LeRoy et al. [21]). Así, un estado tensional triaxial como el que se produce en el centro de una probeta de tracción conduce a un aumento notable de la velocidad de crecimiento de huecos. En esta zona, los huecos que fuesen inicialmente esféricos siguen siendo sensiblemente esféricos. Sin embargo, cerca de la superficie de la

probeta, donde la triaxialidad tensional disminuye, la forma de los huecos tiende a ser elipsoidal con el eje mayor orientado paralelamente a la tensión aplicada.

McClintock [22] propuso un modelo según el cuál la fractura se produce como consecuencia del contacto que se lleva a cabo entre cavidades próximas entre sí y formuló, a partir de observaciones experimentales, un modelo, válido únicamente para el caso de huecos cilíndricos de sección elíptica sometidos a tensiones bidimensionales, según el cuál la velocidad de crecimiento del radio medio de la cavidad \dot{R} se puede expresar:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{\epsilon}_{eq}^p \sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \frac{(1-n)\sigma_m \sqrt{3}}{\sigma_{eq}} \quad (2.6)$$

siendo R el radio medio de la cavidad, $\dot{\epsilon}_{eq}^p$ la variación temporal de la deformación equivalente de Von Mises, n el coeficiente de endurecimiento por deformación, y σ_m y $\bar{\sigma}$ la tensión hidrostática y la tensión equivalente de Von Mises, respectivamente.

Este modelo no está de acuerdo con observaciones micrográficas que demuestran que en muchos casos se produce la coalescencia de microvacíos antes de que se produzca su contacto.

2.4.2. El modelo de Rice y Tracey

Rice y Tracey [23] analizaron la evolución de un único hueco inicialmente esférico contenido en una matriz infinita constituida por un material elastoplástico sometido a un campo remoto de tensiones, σ_{ij} , y velocidades de deformación $\dot{\epsilon}_{ij}$ (ver figura 2.3)

El principal resultado de su análisis es la predicción de la evolución de los radios de la cavidad según tres direcciones principales, evolución dada por la siguiente expresión:

$$\dot{R}_i = (\gamma \dot{\epsilon}_i + D \dot{\epsilon}_{eq}) R \quad (2.7)$$

El parámetro γ puede variar entre 2 para materiales perfectamente plásticos hasta 5/3 para materiales con endurecimiento por deformación lineal. D es una función del coeficiente de triaxialidad del campo tensional, T , definido éste como el cociente entre la tensión hidrostática, $\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ y la tensión equivalente, $\bar{\sigma}$, es decir: $T = \sigma_m/\bar{\sigma}$.

Para el caso de material perfectamente plástico D tiene la siguiente expresión:

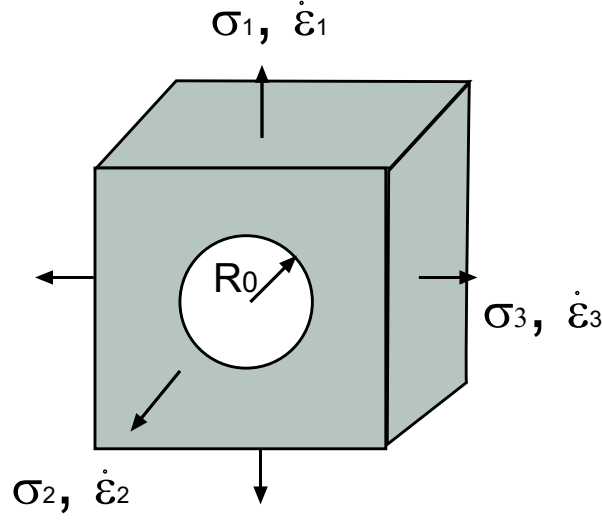


Figura 2.3: Hueco esférico en un sólido infinito

$$D = 0,558 \sinh\left(\frac{3}{2}T\right) + 0,008\phi \cosh\left(\frac{3}{2}T\right) \quad (2.8)$$

donde ϕ es un parámetro definido por:

$$\phi = -\frac{3\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3} \quad (2.9)$$

mientras que para materiales con endurecimiento por deformación lineal, D toma el valor

$$D = \frac{3}{4}T \quad (2.10)$$

Teniendo en cuenta la incompresibilidad de la matriz ($\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0$) y con ayuda del parámetro ϕ , definido en (2.9), las velocidades de deformación en las direcciones 2 y 3 se pueden escribir en función de la velocidad de deformación en la dirección 1 mediante:

$$\dot{\epsilon}_2 = \frac{-2\phi}{3 + \phi} \dot{\epsilon}_1 \quad \dot{\epsilon}_3 = \frac{\phi - 3}{3 + \phi} \dot{\epsilon}_1 \quad (2.11)$$

La ecuación (2.7) es estrictamente aplicable a un hueco perfectamente esférico. Sin embargo, el hueco que se considera inicialmente esférico, estrictamente deja de serlo durante el proceso de deformación. Por tanto, en la ecuación (2.7) es necesario sustituir R por un radio medio de la cavidad $R_m = 1/3(R_1 + R_2 + R_3)$. Haciendo uso de las relaciones (2.11) se puede integrar la ecuación diferencial resultante obteniéndose:

$$R_m = R_0 e^{\frac{2\sqrt{3+\phi^2}}{3+\phi} D \varepsilon_1} \quad (2.12)$$

R_0 es el radio inicial de la cavidad.

Sustituyendo ahora R por R_m en la ecuación diferencial (2.7), ésta puede ser integrada obteniéndose para los radios orientados según los ejes principales del microvacío elipsoidal las siguiente expresiones:

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(A + \frac{3+\phi}{2\sqrt{3+\phi^2}} B \right) R_0 \\ R_2 &= \left(A - \frac{\phi}{\sqrt{3+\phi^2}} B \right) R_0 \\ R_3 &= \left(A + \frac{\phi-3}{2\sqrt{3+\phi^2}} B \right) R_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde:

$$A = \exp \left(\frac{2\sqrt{3+\phi^2}}{2+\phi} D \varepsilon_1 \right) \quad B = \frac{\gamma(A-1)}{D} \quad (2.14)$$

Rice y Tracey [23] aplicaron las relaciones a una gran cantidad de estados tensionales y obtuvieron la siguiente relación semiempírica para la evolución del radio medio del microvacío que se puede aplicar a todos los casos que estudiaron:

$$\ln \left(\frac{R_m}{R_0} \right) = 0,283 \int_0^{\bar{\varepsilon}^p} e^{\frac{3\sigma_m}{2\sigma}} d\bar{\varepsilon}^p \quad (2.15)$$

con $\bar{\varepsilon}^p$ la deformación plástica equivalente

En este criterio se tiene en cuenta la influencia de la triaxialidad del campo de tensiones y de la deformación plástica equivalente. Sin embargo, como el modelo está basado en la existencia de un único hueco, no se considera la coalescencia y es necesario añadir al modelo un valor de radio crítico como criterio de fractura.

2.5. Coalescencia de microvacíos

El proceso final de la fractura dúctil consiste en la coalescencia de los huecos formados en la matriz plástica. Se han sugerido una serie de mecanismos responsables del fenómeno de coalescencia, entre los que se citan:

- Estricción de la parte de la matriz restante entre huecos hasta que el ligamento pierde totalmente su sección transversal.
- Formación de huecos secundarios en bandas de cortadura localizadas entre los huecos principales; estas bandas se sitúan en los bordes de los huecos principales y forman ángulos de 30 a 40° con la dirección en la que se aplica la tensión.
- Fallo catastrófico de los ligamentos de los huecos, una vez que éstos han alcanzado su tamaño crítico.
- Unión simple de los huecos que crecen sometidos a un estado tensodeformacional intenso.

Los procesos de coalescencia son muy variables y el mecanismo depende mucho de la distribución de tamaño de las segundas fases, de las tensiones de interfase entre matriz plástica e inclusión no metálica y de las características deformacionales de la propia matriz. El análisis del proceso de coalescencia de huecos es importante para obtener materiales de una determinada tenacidad de fractura; para mejorar esta propiedad es necesario conseguir una microestructura capaz de favorecer el crecimiento prolongado de los huecos, retrasando lo más posible su coalescencia.

Un modelo cuantitativo fundamental para analizar el proceso de coalescencia de microvacíos es el propuesto por Thomason [24]. Este modelo pone de manifiesto que el proceso de coalescencia depende de la competencia entre dos modos de deformación. En la primera etapa de la deformación, los microvacíos son de pequeño tamaño y la tensión necesaria para desarrollar un estado de deformación homogénea es menor que la requerida para que ésta se localice y, por tanto, el estado de deformación plástica homogénea tendrá lugar más fácilmente. A medida que la deformación y la fracción volumétrica de cavidades van aumentando, la tensión necesaria para localizar la deformación decrece. Cuando la tensión necesaria para la localización iguala a la correspondiente a deformación homogénea, se produce la coalescencia. La aplicación detallada de este criterio en un caso general tridimensional predice que la coalescencia no ocurrirá mientras se cumpla:

$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} < \left(\gamma \left(\frac{1}{r} - 1 \right)^2 + \frac{\beta}{\sqrt{r}} \right) (1 - \pi r^2) \quad (2.16)$$

comenzando ésta cuando

$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} = \left(\gamma \left(\frac{1}{r} - 1 \right)^2 + \frac{\beta}{\sqrt{r}} \right) (1 - \pi r^2) \quad (2.17)$$

siendo σ_1 la tensión principal máxima, r es una medida de la fracción de ligamento ocupada por los poros, cuya expresión, considerando que los huecos evolucionan manteniendo la forma esférica, es:

$$r = \frac{\sqrt{\frac{3f}{4\pi} e^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}}}{\frac{\sqrt{e^{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}}}{2}} \quad (2.18)$$

donde ε_1 , ε_2 y ε_3 son las deformaciones principales. Para las constantes γ y β Thomason propuso los siguientes valores, $\gamma = 0,1$ y $\beta = 1,2$. Pardo y Hutchinson [25] consideran una dependencia de γ con el coeficiente N en la ley de endurecimiento de Ramberg-Osgood ($\bar{\sigma} = \sigma_0 (\bar{\varepsilon}^p / \varepsilon_0)^N$) de la forma:

$$\gamma = 0,12 + 1,68 N \quad (2.19)$$

2.6. El modelo de Gurson y sus extensiones

Un procedimiento para abordar el análisis cuantitativo de los procesos básicos que gobiernan la fractura dúctil desde el punto de vista de la Mecánica de los Medios Continuos, consiste en modelizar el material poroso compuesto por una matriz con comportamiento elastoplástico en la que se desarrollan microvacíos, mediante un material continuo "homogeneizado" en el que la fracción volumétrica de cavidades se describe a través de una variable interna sujeta a unas ciertas leyes de evolución. Para ello es necesario establecer la ley constitutiva del material "homogeneizado", la cual debe contener los siguientes elementos:

1. Una función de plastificación
2. Reglas de evolución para las deformaciones plásticas y para las citadas variables internas del modelo.
3. Criterios de nucleación de microvacíos.
4. Criterios de coalescencia de microvacíos

En este grupo de modelos hay que incluir el de Gurson [26]. Gurson propuso un criterio de plastificación resultante de un proceso de homogeneización en un material rígido perfectamente plástico en presencia de un microvacío. La superficie de fluencia propuesta originalmente por Gurson se escribe:

$$\Phi(q, p, \bar{\sigma}, f) = \left(\frac{q}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2f \cosh\left(-\frac{3p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (2.20)$$

q representa la tensión macroscópica (del material homogeneizado) efectiva de Von Mises

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S} : \mathbf{S}$$

donde \mathbf{S} es el tensor desviador de tensiones de Cauchy

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} + p : \mathbf{1}$$

siendo p la tensión hidrostática macroscópica

$$p = -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1}$$

y $\bar{\sigma}$ el límite elástico actual de la matriz dependiente, en condiciones estáticas, de la deformación plástica equivalente $\bar{\varepsilon}^p$

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p)$$

Como se puede observar, en el criterio de plastificación de Gurson, a diferencia de las teorías clásicas (como por ejemplo la teoría de plasticidad J_2), influye la tensión hidrostática.

Este criterio fue generalizado posteriormente por Tvergaard [27, 28] y Tvergaard y Needleman [29] introduciendo un conjunto de parámetros (q_1 , q_2 , q_3 y una fracción de microvacíos modificada, f^*) con el objetivo de mejorar las predicciones del modelo en el caso de distribuciones periódicas de cavidades. Con las modificaciones introducidas, la nueva superficie de plastificación se expresa:

$$\Phi(q, p, \bar{\sigma}, f^*) = \left(\frac{q}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1 f^* \cosh\left(-\frac{3q_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - q_3 f^{*2} = 0 \quad (2.21)$$

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \frac{f_u - f_c}{f_F - f_c} \cdot (f - f_c) & \text{si } f_c < f < f_F \\ f_u & \text{si } f \geq f_F \end{cases}$$

Los valores de los parámetros de ajuste q_1 , q_2 y q_3 dependen del material, del daño inicial y de la triaxialidad del estado tensional. Sin embargo estos parámetros suelen tomarse como constantes, de valor: $q_1 = 1,5$; $q_2 = 1,0$ y $q_3 = q_1^2 = 2,25$

El término f_c representa el valor de porosidad crítica a la que comienza la etapa de coalescencia y f_F es el valor para el cual el material experimenta una pérdida total de resistencia. En este punto, $f^*(f_F) = f_u = 1/q_1$, debiéndose anular todas las componentes de tensión para satisfacer la ley de comportamiento del material.

Se observa que cuando $f = 0$, se recupera la condición de plastificación de von Mises típicamente utilizada en los materiales metálicos.

$$\Phi(f = 0) = \Phi_{vonMises} = \left(\frac{q}{\bar{\sigma}}\right)^2 - 1 = 0 \quad (2.22)$$

La figura 2.4 representa la superficie de flujo ($\Phi = 0$) para diferentes valores de porosidad. Dicha figura muestra cómo decrecen los valores de $q/\bar{\sigma}$ y $|-p|/\bar{\sigma}$ a medida que aumentan los valores de daño f .

La ecuación que gobierna la evolución de la porosidad total consta de dos sumandos: el primero contabiliza el aumento de tamaño de las cavidades existentes, $\dot{f}_{crecimiento}$, y el segundo tiene en cuenta la nucleación de nuevos microvacíos, $\dot{f}_{nucleacion}$:

$$\dot{f} = \dot{f}_{crecimiento} + \dot{f}_{nucleacion} \quad (2.23)$$

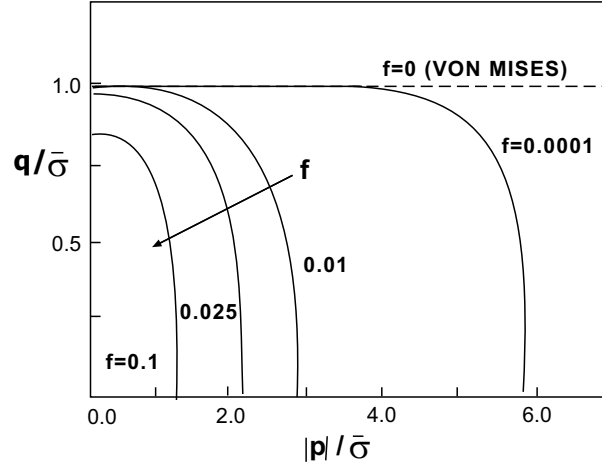


Figura 2.4: Representación de la superficie de flujo en función del daño

Admitiendo que las deformaciones elásticas son despreciables frente a las plásticas y dado que esta últimas no provocan cambio de volumen de la matriz, la variación de la fracción volumétrica de microvacíos como consecuencia de su crecimiento se puede escribir:

$$\dot{f}_{\text{crecimiento}} = (1 - f)\dot{\varepsilon}_{kk} \quad (2.24)$$

donde $\dot{\varepsilon}_{kk}$ es la traza del tensor de velocidades de deformación.

En cuánto a la nucleación de microvacíos, se puede considerar que está controlada tanto por tensión como por deformación, de forma que se adiopta, en el caso más general, una ley de la forma:

$$\dot{f}_{\text{nucleacion}} = A\dot{\varepsilon}^p + B(\dot{\sigma} - \dot{p}) \quad (2.25)$$

representando A y B distribuciones de probabilidad cuyas expresiones son:

$$A = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (2.26)$$

$$B = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\sigma} - p - \sigma_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (2.27)$$

Tanto para el caso de la nucleación controlada por la deformación como la controlada por la tensión, la desviación estándar y la amplitud vienen representadas por s_N y f_N . La media de la distribución viene dada para A y B por $\bar{\varepsilon}_N$ y σ_N respectivamente.

Zhang [30] y Zhang et al. [31] propusieron, partiendo del modelo de Gurson modificado (GTN) y del criterio de coalescencia de Thomason, expresado por las ecuaciones (3.43), (3.44) y (3.45), un modelo mejorado que se ha denominado *modelo de Gurson completo*. En este modelo, el valor de f_c no se toma como constante, sino que en cada punto material toma el valor de f que cumple la ecuación (3.44).

El modelo de Gurson completo ha sido utilizado en el análisis de diferentes problemas estructurales como el del comportamiento en fractura de uniones soldadas [32].

Para la utilización del modelo de Gurson completo para la resolución de problemas estáticos es necesario disponer de los siguientes parámetros:

1. Relativos al material de la matriz: módulo de elasticidad, E , coeficiente de Poisson, ν y variación del límite elástico con la deformación plástica equivalente $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p)$
2. Relativos a la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos:
 - parámetros q_1 y q_2 ($q_3 = q_1^2$)
 - f_0 , ε_n , s_N y f_N
 - parámetros de coalescencia

Como ya se indicó anteriormente, los valores de $q_1 = 1,5$ y $q_2 = 1,0$ han sido utilizados ampliamente en la literatura como constantes independientes incluso del material. No obstante, Faleskog et al. [33] han mostrado que estos parámetros dependen del endurecimiento por deformación del material. En todo caso, una vez conocida esta dependencia, los parámetros toman valores constantes durante todo el proceso de deformación. Muy recientemente Zhang et al. [34] y Kim et al. [35] han puesto de manifiesto que, además, estos parámetros dependen del estado tensional a través de la triaxialidad y del parámetro de Lode. A pesar de que se ha reconocido esta dependencia, en nuestro conocimiento, no se ha incorporado en la formulación del modelo de Gurson.

El modelo de Gurson fue originalmente desarrollado para problemas estáticos. Sin embargo, diferentes autores lo han aplicado también a problemas dinámicos, en los cuáles

debe considerarse, tanto los efectos inerciales, como la influencia de la velocidad de deformación en las propiedades del material (Pan et al. [36], Peirce et al. [37], Tvergaard y Needleman [38], Worswick y Pick [39], Worswick y Pelletier [40], Becker [41], Børvik et al. [42]).

Recientemente, Betegón et al. [43] han propuesto un método implícito para integrar las ecuaciones del modelo de Gurson completo aplicable a problemas dinámicos. En los citados trabajos, no se considera los efectos térmicos que acompañan a los proceso de deformación a alta velocidad de deformación.

Srikanth y Zabaras [44] propusieron un modelo termomecánico acoplado con daño dúctil aplicado al análisis de procesos de conformado de metales. En este trabajo, sin embargo, no se considera ningún efecto dinámico en el modelo.

Otros autores (Koppenhoefer y Dodds [45], Eberle et al. [46], Needleman y Tvergaard [47], Tvergaard y Needleman [48], Hao y Brock [49]) han aplicado el modelo de Gurson incluyendo efectos de la velocidad de deformación y de la temperatura. Sin embargo, estas formulaciones, aplicables a problemas termoviscoplasticos, no garantizan las condiciones de consistencia en la integración de las ecuaciones constitutivas.

El modelo de Gurson y las modificaciones que se han reseñado consideran que los microvacíos son inicialmente esféricos y mantiene su forma esférica a lo largo del proceso de deformación. Sin embargo, es obvio que, dependiendo del procedimiento de fabricación del material, los microvacíos pueden tener inicialmente formas muy diversas. Aún considerando que todos los huecos son inicialmente esféricos, el campo tenso-deformacional impuesto modificará considerablemente su forma inicial. Para tener en cuenta estos fenómenos de forma inicial y de evolución de los huecos han surgido otras modificaciones del modelo GTN entre las que cabe destacar las propuestas por Gologanu et al. [50, 51] que consideran modelos de nucleación en capas y en columnas y que estudian además el cambio de forma de los huecos durante su crecimiento.

Otras modificaciones que se han propuesto tratan de solventar el problema de la localización del daño en un punto, fenómeno que es consecuencia directa de la propia naturaleza del modelo de Gurson. En este sentido se han desarrollado modelos no locales aplicados a la porosidad [52, 53], es decir, consideran que los valores de esta variable son valores medios correspondientes a regiones colindantes con el punto considerado, o de forma más general, a la tensión de flujo del material de la matriz que se hace depender

no sólo de la deformación plástica sino de sus derivadas [54, 55].

No obstante, estos modelos, de indudable rigor formal, complican extraordinariamente el ya complejo modelo de Gurson completo, con lo que hoy en día son de difícil utilización en aplicaciones de ingeniería.

2.7. Modelos basados en la Mecánica del Daño

Como alternativa a estas aproximaciones basadas en modelos micromecánicos, se pueden citar los modelos basados en Mecánica del Daño, donde las variables que describen el daño del material, representan, en un sentido estadístico, la distribución de microdefectos y son consideradas variables de estado, cuya evolución debe ser determinada como parte del modelo. La Mecánica del Daño se construye rigurosamente sobre la base de la Termodinámica de sólidos con variables internas. Se supone que la respuesta del material depende de su estado microestructural y que éste se puede describir con un número finito de variables internas. La primera definición de la variable de daño como variable mecánica se debe a Kachanov [56], quien diferenció entre área nominal, A , y área efectiva, A_{ef} , y definió una variable escalar de daño, D , asociada a una dirección espacial, n , como:

$$D = 1 - \frac{A_{ef}}{A} \quad (2.28)$$

Con esta definición se está considerando que el daño es isótropo, no dependiente de la dirección. Posteriormente se han realizado estudios que consideran la variable de daño como un tensor de segundo orden o, incluso, como un tensor de orden superior.

La variable de daño está comprendida entre los valores $D = 0$, que corresponde al material no dañado y $D = D_c$, que corresponde a un estado crítico que implica la rotura del elemento.

Posteriormente, Rabotnov [57] introdujo el concepto de tensión efectiva, $\tilde{\sigma}$, que es la tensión resultante al aplicar las cargas totales sobre el área efectiva o neta, es decir:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (2.29)$$

Basándose en el concepto de tensión efectiva, Lemaitre [58] introdujo el principio de deformación equivalente que se expresa de la siguiente forma: *"las leyes constitutivas del material dañado se obtiene a partir de las del material sin daño, sustituyendo la tensión σ por la tensión efectiva $\tilde{\sigma}$ "*.

La Mecánica del Daño es una teoría de carácter general que se puede aplicar para explicar fenómenos como fractura frágil, dúctil, fatiga y fluencia. La cuestión fundamental es describir correctamente las leyes de evolución del daño, las cuáles deben ser definidas a partir del conocimiento de los fenómenos físicos responsables, en cada caso, de los procesos de daño. En el excelente texto de Lemaitre y Chaboche sobre Mecánica de Sólidos [59] puede encontrarse una detallada descripción de esta teoría aplicada a los diferentes fenómenos mencionados.

Aquí se van a mencionar algunas características específicas de esta teoría aplicada al caso de fractura dúctil y se van a citar algunos trabajos de entre los muchos que se pueden encontrar en la bibliografía.

Dentro de este tipo de modelos destaca el de Rousselier ([60, 61]). Esencialmente, el modelo supone una función de plastificación compuesta por dos términos aditivos, el primero coincide con la función de Von Mises, mientras que el segundo tiene en cuenta la influencia de la variable de daño en el campo tensional. La variable de daño, se asocia a la porosidad del material y su correspondiente ley de evolución se obtiene mediante las hipótesis de conservación de la masa e incompresibilidad del material no dañado (sometido a deformaciones plásticas) durante el proceso de deformación. Aunque este modelo está menos extendido que el de Gurson, ha sido utilizado por distintos investigadores para analizar el comportamiento en rotura de distintos tipos de probetas [61, 62] y, en la actualidad, sigue recibiendo una considerable atención, habiéndose propuesto extensiones aplicables a problemas y viscoplásticos [63], así como al problema de la propagación de fisuras en materiales dúctiles [64, 5]

2.8. Problemas de cavitación en sólidos

Otros procesos que involucran la nucleación y crecimiento de microvacíos son los fenómenos de cavitación en sólidos, en los que se observa un rápido crecimiento de los microvacíos sin aumento de las deformaciones en puntos alejados del propio microvacío que dan lugar a procesos de inestabilidad y rotura.

Los procesos de inestabilidad en el crecimiento de huecos en problemas estáticos y con condiciones de simetría esférica fue estudiado teóricamente por Bishop y otros [65], Ball [66], Horgan y Abeyaratne [67], Horgan y Polignone [68].

Para ilustrar el significado del fenómeno de la cavitación en sólidos se presenta la solución del problema de la expansión de una cavidad esférica de radio inicial a_0 contenida en un sólido infinito elastoplástico e incompresible, sometido a una tensión radial remota de valor p (figura 2.5).

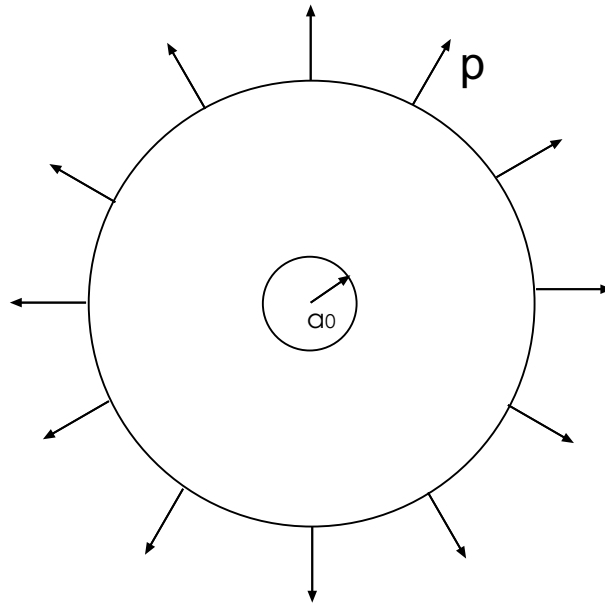


Figura 2.5: Cavidad esférica en un medio infinito

El estado de deformación de se puede describir mediante:

$$r = r(R) \quad \theta = \Theta \quad \phi = \Phi \quad (2.30)$$

donde (r, θ, ϕ) representa, en un sistema de coordenadas esféricas, la posición actual del punto que en la configuración no deformada está situado en (R, Θ, Φ) . El gradiente de deformación, F , viene dado por

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{R} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Usando la hipótesis de incompresibilidad que requiere que $\det F = 1$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$r^2 \frac{\partial r}{\partial R} = R^2 \quad (2.32)$$

que integrada da lugar a la relación:

$$r(R) = \{R^3 + a^3 - a_0^3\}^{1/3} \quad (2.33)$$

donde a es el radio actual de la cavidad.

A partir de (2.30) y (2.33), las componentes no nulas del tensor de velocidad de deformación, \mathbf{d} , se pueden escribir:

$$d_r = -\frac{2\dot{r}}{r} \quad d_\theta = d_\phi = \frac{\dot{r}}{r} \quad (2.34)$$

Para el material elastoplástico e incompresible se considera un modelo constitutivo basado en la plasticidad de Von Mises (J_2) extendida a deformaciones finitas, de tal forma que se puede relacionar el tensor de velocidad de deformación con las tensiones mediante:

$$d = \frac{3}{2E} \mathbf{S}^\nabla + \frac{3}{2} \Lambda \dot{\bar{\varepsilon}}_p(\bar{\sigma}) \frac{\mathbf{S}}{\bar{\sigma}} \quad (2.35)$$

siendo \mathbf{S} el tensor desviador de tensiones de Cauchy y \mathbf{S}^∇ la derivada de Jaumann de dicho tensor que, en el problema que se estudia, coincide con la derivada temporal, es decir, $\mathbf{S}^\nabla = \dot{\mathbf{S}}$; $\bar{\varepsilon}_p$ es la deformación plástica equivalente que se supone función de la tensión equivalente, $\bar{\sigma}$; E es el módulo de Young del material y Λ es un parámetro que toma los valores $\Lambda = 1$ (en carga) y $\Lambda = 0$ (en descarga). En el caso de tensión uniaxial, a partir de la relación (2.35), se puede obtener $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\bar{\sigma})$ que se puede invertir de tal forma que $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$

Por otra parte la ecuación de equilibrio en ausencia de fuerzas másicas se escribe:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.36)$$

donde σ_r y σ_θ son, respectivamente, las tensiones radial y en dirección θ en la configuración deformada. Esta ecuación debe integrarse con las condiciones de contorno:

$$r = a \quad \sigma_r = 0 \quad r \rightarrow \infty \quad \sigma_r = p \quad (2.37)$$

Haciendo el cambio de variable $\eta = \frac{r}{a}$ y observando que la tensión equivalente, $\bar{\sigma}$, es:

$$\bar{\sigma} = \sigma_{\theta} - \sigma_r \quad (2.38)$$

se obtiene:

$$p = \int_1^{\infty} \frac{2\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\eta} d\eta \quad (2.39)$$

La deformación equivalente, $\bar{\varepsilon}$, se puede obtener a partir de la velocidad de deformación equivalente, $\dot{\bar{\varepsilon}}$, ($\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2\dot{r}}{r}$), es decir: $\varepsilon = 2 \ln \frac{r}{R}$ y teniendo en cuenta la relación (2.33) se puede escribir:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3} \ln \frac{\eta^3}{\eta^3 - 1 + (\frac{a_0}{a})^3} \quad (2.40)$$

Con el anterior cambio de variable, la ecuación (2.39) se transforma en:

$$p = \int_0^{2 \ln \frac{a}{a_0}} \frac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\exp(\frac{3\bar{\varepsilon}}{2}) - 1} d\bar{\varepsilon} \quad (2.41)$$

Esta expresión permite calcular la tensión necesaria, p , para expandir una cavidad desde el radio inicial a_0 al radio final a . El fenómeno de cavitación se produce si la cavidad se expande indefinidamente. La tensión p^* necesaria para que se produzca el fenómeno se puede calcular a partir de la ecuación (2.41) en el límite $\frac{a}{a_0} \rightarrow \infty$, es decir:

$$p^* = \int_0^{\infty} \frac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\exp(\frac{3\bar{\varepsilon}}{2}) - 1} d\bar{\varepsilon} \quad (2.42)$$

Para las relaciones $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ habituales, que cumplen:

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = O(\bar{\varepsilon}) \quad \bar{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad (2.43)$$

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = O(\bar{\varepsilon}^n) \quad \bar{\varepsilon} \rightarrow \infty, \quad n \geq 0 \quad (2.44)$$

con la expresión (2.42) se obtiene un valor finito para la tensión p^* , es decir, existe una tensión finita que produce una expansión indefinida de la cavidad de radio inicial a_0 . Esta tensión crítica se conoce como tensión de cavitación y ha sido obtenida sin necesidad de aplicar ningún criterio "ad hoc".

Suponiendo que el material obedece a una ley dada por:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_y} = \begin{cases} \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_y} & \text{si } |\bar{\varepsilon}| \leq \varepsilon_y \\ \text{sign}(\bar{\varepsilon}) & \text{si } |\bar{\varepsilon}| > \varepsilon_y \end{cases}$$

se tiene:

$$\frac{p^*}{\sigma_y} = \int_0^{\varepsilon_y} \frac{\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_y}}{\exp(\frac{3\bar{\varepsilon}}{2}) - 1} d\bar{\varepsilon} + \int_{\varepsilon_y}^{\infty} \frac{1}{\exp(\frac{3\bar{\varepsilon}}{2}) - 1} d\bar{\varepsilon} \quad (2.45)$$

que usando $\xi = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_y}$ se puede transformar en:

$$\frac{p^*}{\sigma_y} = -\frac{2}{3} \int_0^1 \ln(1 - e^{-\frac{3\varepsilon_y \xi}{2}}) d\xi \quad (2.46)$$

Con la aproximación $1 - e^{-\frac{3\varepsilon_y \xi}{2}} \cong \frac{3\varepsilon_y \xi}{2}$ se obtiene finalmente:

$$\frac{p^*}{\sigma_y} = \frac{2}{3} (1 + \ln(\frac{2}{3\varepsilon_y})) + O(\varepsilon_y) \quad (2.47)$$

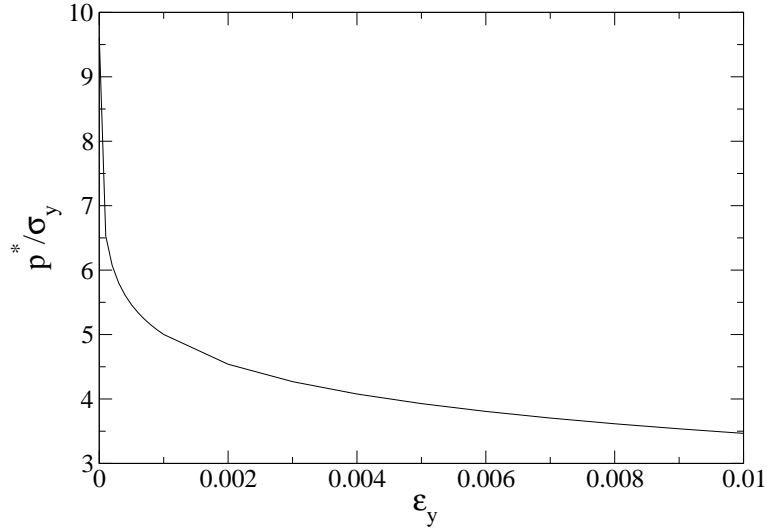


Figura 2.6: Tensión de cavitación

En la figura 2.6 se muestra la tensión de cavitación, adimensionalizada con el límite elástico del material, en función de ε_y .

El mismo procedimiento de análisis se puede aplicar formalmente para encontrar la solución del problema de la nucleación de una cavidad en una esfera elastoplástica e incompresible de radio inicial b_0 sometida a tensión radial, p [69].

La solución elemental para este problema proporciona, para todo valor $p \geq 0$, $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\phi = 0$ y $a = 0$. Esta solución corresponde a un estado de deformación homogénea dado por $r = r(R) = R$.

La cuestión que se plantea es si existe solución para el problema en el que $a > 0$, cumpliéndose entonces la condición adicional:

$$\sigma_r(a) = 0 \quad (2.48)$$

Combinando las ecuaciones (2.33), (2.36) y (2.38) se puede obtener:

$$\sigma_r(r) = p - \int_{2 \ln \frac{b}{b_0}}^{2 \ln \frac{r}{R}} \frac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\exp(\frac{3\bar{\varepsilon}}{2}) - 1} d\bar{\varepsilon} \quad \text{con } R^3 = r^3 - a^3 \quad (2.49)$$

Teniendo en cuenta la condición de contorno dada por (2.48), se alcanza la expresión

$$p = \int_{2 \ln \frac{b}{b_0}}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\exp(\frac{3\bar{\varepsilon}}{2}) - 1} d\bar{\varepsilon} \quad \text{con } b^3 = b_0^3 + a^3 \quad (2.50)$$

La tensión crítica necesaria para nuclear la cavidad se obtiene a partir de la ecuación anterior en el límite $a \rightarrow 0^+$, es decir:

$$p^* = \int_0^{\infty} \frac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\exp(\frac{3\bar{\varepsilon}}{2}) - 1} d\bar{\varepsilon} \quad (2.51)$$

Así pues, para valores de la tensión remota p superiores a la tensión crítica p^* la solución que predice un estado de deformación homogénea se bifurca, dando lugar a una segunda configuración posible con una cavidad cuyo radio, a , se puede calcular a partir de la ecuación (2.50). La tensión a la que se produce la bifurcación obedece a la misma expresión que la tensión de cavitación dada por la ecuación (2.42).

Es necesario hacer notar que la citada bifurcación está asociada a la consideración de deformaciones finitas (no infinitesimales); cuando se aborda el problema considerando deformaciones infinitesimales se alcanza la siguiente expresión para la tensión crítica [69]:

$$p^* = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{\sigma_e(\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}} d\bar{\varepsilon} \quad (2.52)$$

Para las relaciones habituales, $\sigma_e(\bar{\varepsilon})$, dadas por (2.43) y (2.44), la ecuación (2.52) indica que la bifurcación no se produce para ningún valor finito de la tensión p , puesto que la función $\frac{\sigma_e}{\bar{\varepsilon}}$ no es integrable.

Este tipo de problemas con simetría esférica, pero considerando aplicación de cargas dinámicas ha sido estudiado por diferentes autores (Ortiz y Molinari [70], Wu et al. [71], Kennedy et al. [72]).

Por otra parte, Huang et al. [73] y Tvergaard et al. [74] han estudiado las condiciones en las que se produce la inestabilidad en microvacíos esféricos sometidos a estados tensionales axisimétricos con altos valores de triaxialidad.

La mayoría de los análisis de inestabilidades por cavitación realizados hasta ahora suponen la presencia de un único hueco contenido en un sólido infinito o en presencia de fracciones volumétricas de microvacíos despreciables (prácticamente nulas). Sin embargo, los metales contienen distribuciones de microvacíos y resulta de interesante estudiar su efecto en la aparición del fenómeno de cavitación.

2.9. Recapitulación

En este capítulo de introducción se ha realizado un sucinto repaso de las ideas fundamentales que inspiran los modelos de fractura dúctil que tratan de recoger los micro-mecanismos responsables de este tipo de fractura en sus predicciones cuantitativas. Se ha hecho especial hincapié en el modelo de Gurson y en algunas de las modificaciones propuestas para solventar las carencias de este modelo.

Dentro de la utilización del modelos que se ha denominado modelo de Gurson completo, se han detectado algunas cuestiones en las que es posible mejorar el modelo, bien extendiéndole a situaciones no contempladas hasta el momento, o bien relajando algunas de las hipótesis habituales en su formulación. También resulta de interés la aplicación del modelo de Gurson en el análisis de problemas de cavitación en materiales dúctiles.

Así se ha decidido trabajar en tres direcciones complementarias que concuerda con los objetivos expresados en el apartado 1.2, a saber:

- Planteamiento de métodos de integración consistente de las ecuaciones del modelo GTN completo aplicables a problemas termoviscoplasticos
- Análisis de las modificaciones del modelo GTN considerando que los parámetros q_1 y q_2 dependen del campo tensional y, en particular, de la triaxialidad de éste

- Análisis de problemas de cavitación en sólidos que contienen porosidad inicial como es el caso de los metales dúctiles.

Capítulo 3

MODELO DE GURSON PARA PROBLEMAS TERMOVISCOPLÁSTICOS

3.1. Introducción

En general, la resolución de un problema de mecánica de sólidos deformables consiste en obtener el campo de desplazamientos, tensiones y deformaciones (y eventualmente de otras variables de interés, como densidad, temperatura, etc...) en todos los puntos del sólido fabricado con un material del que se conocen sus ecuaciones constitutivas, sometido a unas ciertas sollicitaciones termomecánicas (condiciones de contorno) y a partir de una configuración que constituye las condiciones iniciales del problema.

Para alcanzar este objetivo se dispone de los siguientes principios que formulados dan lugar a las correspondientes ecuaciones que permiten resolver el problema: (véase, por ejemplo, [75] y [76])

1. Conservación de la masa
2. Conservación del momento lineal y del momento angular
3. Conservación de la energía
4. Relaciones deformación desplazamiento
5. Ecuaciones constitutivas

El problema se puede plantear a partir de ecuaciones diferenciales (formulación fuerte) o a partir de principios variacionales (formulación débil) que son la base de los métodos de solución numérica de elementos finitos.

En este capítulo se ha abordado el problema de la integración de las ecuaciones constitutivas del modelo de Gurson aplicado a problemas termoviscoplasticos.

El capítulo comienza con unas nociones básicas de cinemática de sólidos deformables necesaria para comprender el posterior desarrollo del capítulo y en el Anexo I se recogen algunas operaciones con tensiones utilizadas a lo largo del trabajo.

3.1.1. Cinemática de sólidos deformables

Sea $\mathcal{B}_t \subset \mathcal{R}^3$ la configuración de un cuerpo en el tiempo $t \in \mathcal{R}$, y $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{R}^3$ la configuración inicial o no deformada del cuerpo en el tiempo $t = 0$.

Sea $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ y $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ la posición de la partícula en la configuración inicial y en la configuración en el tiempo t respectivamente.

Se define el tensor gradiente de deformación \mathbf{F} como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.1)$$

\mathbf{F} transforma un vector infinitesimal $d\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ de la configuración material a la espacial $d\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ en la forma:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (3.2)$$

Se define el tensor gradiente de velocidades \mathbf{l} como la derivada espacial de la velocidad $\mathbf{v}_t(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}_t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad (3.3)$$

donde (\cdot) indica derivada con relación al tiempo.

Las partes simétricas y antisimétricas del tensor \mathbf{l} definen dos nuevos tensores: el tensor velocidad de deformación \mathbf{d} y el tensor spin \mathbf{w} definidos como:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad (3.5)$$

Le tensor gradiente de deformación se puede separar en sus componentes elástica, térmica y plástica [77]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^\theta \mathbf{F}^p \quad (3.6)$$

El gradiente de velocidades puede escribirse como:

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{l}^e + \mathbf{F}^e \mathbf{l}^\theta \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \mathbf{l}^p \mathbf{F}^{e-1} \quad (3.7)$$

siendo \mathbf{l}^e , \mathbf{l}^θ y \mathbf{l}^p los gradientes de velocidad elástico, térmico y plástico, definidos respectivamente como:

$$\mathbf{l}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1}, \quad \mathbf{l}^\theta = \dot{\mathbf{F}}^\theta \mathbf{F}^{\theta-1}, \quad \mathbf{l}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \quad (3.8)$$

En materiales hipoelásticos, se supone que las deformaciones (y las velocidades de deformación) elásticas son pequeñas comparadas con las plásticas y con la unidad, es decir:

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\varepsilon^e) \quad (3.9)$$

Si además se considera que la deformación térmica es puramente volumétrica:

$$\mathbf{F}^\theta = [\det(\mathbf{F}^\theta)]^{1/3} \mathbf{1} \quad \mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij} \quad (3.10)$$

entonces la ecuación (3.7) puede escribirse como:

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}^e + \mathbf{l}^\theta + \mathbf{l}^p \quad (3.11)$$

Por tanto, el tensor de velocidades de deformación, \mathbf{d} , parte simétrica del tensor \mathbf{l} , se puede descomponer también como suma de las contribuciones elástica, térmica y plástica:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^\theta + \mathbf{d}^p \quad (3.12)$$

3.2. Ecuaciones constitutivas

A continuación, se plantean las ecuaciones constitutivas del modelo de Gurson aplicado a problemas termoviscoplasticos considerando la influencia de la velocidades de deformación y de la temperatura.

- **Hipótesis de aditividad de deformaciones**

Se considera que el material es hipoelasto-plástico y, como se indicó anteriormente, la velocidad de deformación total es la suma de sus componentes elástica, plástica y térmica :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^\theta + \mathbf{d}^p \quad (3.13)$$

- **Relación entre tensiones y deformaciones elásticas**

La variación temporal de la deformación elástica, \mathbf{d}^e , se relaciona con una derivada objetiva $\boldsymbol{\sigma}^\nabla$ del tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, mediante:

$$\boldsymbol{\sigma}^\nabla = \mathbf{C} : \mathbf{d}^e = \mathbf{C} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p - \mathbf{d}^\theta) \quad (3.14)$$

\mathbf{C} es el tensor elástico isotrópico lineal de cuarto orden cuya expresión es:

$$\mathbf{C} = 2G\mathbf{I}^{dev} + K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (3.15)$$

siendo G y K constantes elásticas del material relacionadas con el módulo de elasticidad, E , y el coeficiente de Poisson, ν , mediante:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.16)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.17)$$

\mathbf{I}^{dev} es el tensor unitario desviador de cuarto orden definido como:

$$\mathbf{I}^{dev} = \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (3.18)$$

\mathbf{I} y $\mathbf{1}$ son, respectivamente, el tensor identidad de cuarto y segundo orden:

$$\mathbf{I}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij} \quad (3.20)$$

Se pueden definir diferentes derivadas objetivas del tensor de tensiones, entre las que destacan la derivada de Jaumann, σ^J , dada por:

$$\sigma^J = \dot{\sigma} + \sigma \mathbf{w} - \mathbf{w} \sigma \quad (3.21)$$

\mathbf{w} es el tensor de spin, y la derivada de Green-Naghdi-McInnis, σ^{GN} , cuya expresión es:

$$\sigma^{GN} = \dot{\sigma} + \sigma \Omega - \Omega \sigma \quad (3.22)$$

siendo $\Omega = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ y \mathbf{R} el tensor de rotación en la descomposición polar del gradiente de deformación \mathbf{F} ($\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$).

La utilización de este tipo de medidas de la variación de tensiones garantiza la objetividad de las relaciones constitutivas, objetividad que no se preserva si se utiliza la derivada temporal del tensor de tensiones de Cauchy, $\dot{\sigma}$.

• Criterio de Plastificación

La función de plastificación Φ tiene como expresión:

$$\Phi(q, p, \bar{\sigma}, f^*) = \left(\frac{q}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1 f^* \cosh\left(-\frac{3q_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - q_1^2 f^{*2} \quad (3.23)$$

donde $q = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S} : \mathbf{S}}$ es la tensión equivalente de Von Mises, $p = -\frac{1}{3}\sigma : \mathbf{1}$ la presión hidrostática, $\mathbf{S} = \sigma + p : \mathbf{1}$ el tensor de tensiones desviadoras de Cauchy y $\bar{\sigma}$ el límite

elástico actual de la matriz del material, dependiente de $\bar{\varepsilon}^p$, $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ y θ en condiciones termoviscoplasticas:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \theta) \quad (3.24)$$

Los parámetros de ajuste q_1 y q_2 se suelen tomar como constantes de valor $q_1 = 1,5$ y $q_2 = 1,0$.

f^* es la fracción de porosidad modificada:

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \frac{f_u - f_c}{f_F - f_c} \cdot (f - f_c) & \text{si } f_c < f < f_F \\ f_u & \text{si } f \geq f_F \end{cases}$$

siendo f_c el valor de daño crítico en el que comienza la coalescencia, y f_F el valor de daño en el que el material experimenta una pérdida total de resistencia ($f(f_F) = f_u = 1/q_1$)

- **Evolución de la deformación plástica**

La evolución de la deformación plástica se establece utilizando la regla de normalidad:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.25)$$

En esta expresión, el multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ proporciona la magnitud de la variación de la deformación plástica, y el gradiente $\partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma}$ indica la dirección de la variación de \mathbf{d}^p durante el proceso de deformación.

- **Deformaciones térmicas**

La evolución de la deformación térmica puede escribirse, en función del coeficiente de expansión térmica α , como:

$$\mathbf{d}^\theta = \alpha \dot{\theta} \mathbf{1} \quad (3.26)$$

- **Equivalencia del trabajo plástico**

Realizando la hipótesis de equivalencia de trabajo plástico en el material homogeneizado y en el material de la matriz, se obtiene la relación:

$$(1 - f) \bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p \quad (3.27)$$

- **Velocidad de deformación plástica equivalente**

La deformación plástica equivalente $\bar{\varepsilon}^p$ se obtiene a partir de $\dot{\varepsilon}^p$ por integración de

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}^p(\tau) d\tau \quad (3.28)$$

en t .

- **Variación de la densidad**

Aplicando el principio de conservación de la masa:

$$\rho V = cte \rightarrow \dot{\rho} V + \rho \dot{V} = 0 \quad (3.29)$$

y teniendo en cuenta la definición de velocidad de deformación volumétrica:

$$\mathbf{d}_{vol} = \mathbf{d} : \mathbf{1} = \frac{\dot{V}}{V} \quad (3.30)$$

donde V es el volumen total del material.

La variación de densidad del material puede escribirse de la forma:

$$\dot{\rho} + \rho \mathbf{d} : \mathbf{1} = 0 \quad (3.31)$$

- **Variación de la temperatura por disipación plástica**

Durante el proceso de deformación, una cierta cantidad de trabajo plástico se convierte en calor. Si se supone que el proceso de deformación es suficientemente rápido, no hay apenas flujo de calor y se asume que el proceso es adiabático. En condiciones adiabáticas, el aumento de temperatura debido a disipación plástica puede ser calculado aplicando el siguiente balance simplificado de energía:

$$\rho C_p \dot{\theta} = \chi \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p \quad (3.32)$$

con ρ y C_p la densidad del material de Gurson y el calor específico del material respectivamente, $\dot{\theta}$ la variación de la temperatura, y χ el coeficiente de Quinney-Taylor que, en el caso de metales, toma normalmente el valor de 0,9.

- **Evolución de la porosidad**

La porosidad f se define, en función del volumen ocupado por los huecos, V_h , y el volumen de la matriz, V_m , como:

$$f = \frac{V_h}{V_m + V_h} \quad (3.33)$$

La ecuación que gobierna su evolución consta de dos componentes, una tiene en cuenta la nucleación de microvacíos y la segunda su crecimiento:

$$\dot{f} = \dot{f}_{nucleacion} + \dot{f}_{crecimiento} \quad (3.34)$$

Nucleación

La nucleación de microvacíos puede estar controlada tanto por la tensión como por la deformación, y en el caso más general tiene la forma:

$$\dot{f}_{nucleacion} = A\dot{\bar{\epsilon}}^p + B(\dot{\bar{\sigma}} - \dot{p}) \quad (3.35)$$

donde A y B se escriben como:

$$A = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\epsilon}^p - \bar{\epsilon}_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (3.36)$$

$$B = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\sigma} - p - \sigma_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (3.37)$$

Tanto para el caso de la nucleación controlada por la deformación como la controlada por la tensión, f_N y s_N representan la amplitud y la desviación standard de las distribuciones y $\bar{\epsilon}_N$ y σ_N los valores medios de las mismas.

Crecimiento

Para obtener la evolución de la porosidad por crecimiento de microvacíos, se deriva la expresión (3.34) con respecto al tiempo obteniéndose:

$$\dot{f}_{crecimiento} = \frac{\dot{V}_h V_m - \dot{V}_m V_h}{(V_h + V_m)^2} \quad (3.38)$$

Suponiendo que las deformaciones elásticas son despreciables, y dado que en la matriz la deformación plástica no provoca cambio de volumen ($\dot{V}_m^p = 0$), se tiene que:

$$\dot{f}_{crecimiento} = \frac{(\dot{V}_h^p + \dot{V}_h^\theta) V_m - \dot{V}_m^\theta V_h}{(V_h + V_m)^2} \quad (3.39)$$

siendo \dot{V}_h^θ y \dot{V}_m^θ variaciones de volumen debidas a efectos térmicos de los huecos y de la matriz, y \dot{V}_h^p variaciones de volumen de huecos debidas a deformación plástica.

Se puede demostrar que los cambios de volumen de origen térmico cumplen, tanto para la matriz como para los huecos, la relación:

$$\frac{\dot{V}_{hueco}^\theta}{V_{hueco}} = \frac{\dot{V}_{matriz}^\theta}{V_{matriz}} = 3\alpha\dot{\theta} \quad (3.40)$$

Teniendo en cuenta (3.40), e introduciendo en la expresión (3.38) la definición de velocidad de deformación plástica volumétrica $\mathbf{d}_{vol}^p = \dot{V}_{hueco}^p / (V_{hueco} + V_{matriz})$, la variación de la porosidad por crecimiento puede escribirse como:

$$\dot{f}_{crecimiento} = \frac{\dot{V}_h^p V_m}{(V_h + V_m)^2} = (1 - f) \mathbf{d}_{vol}^p \quad (3.41)$$

$$\dot{f}_{crecimiento} = (1 - f) \mathbf{d}^p : \mathbf{1} \quad (3.42)$$

que como puede observarse coincide con la expresión de evolución de la porosidad por crecimiento de microvacíos sin tener en cuenta los efectos térmicos.

Coalescencia

Se adopta el criterio de coalescencia de Thomason que establece que no existe coalescencia si se cumple:

$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} < \left(\gamma \left(\frac{1}{r} - 1 \right)^2 + \frac{\beta}{\sqrt{r}} \right) (1 - \pi r^2) \quad (3.43)$$

y que la coalescencia comienza cuando:

$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} = \left(\gamma \left(\frac{1}{r} - 1 \right)^2 + \frac{\beta}{\sqrt{r}} \right) (1 - \pi r^2) \quad (3.44)$$

σ_1 es la tensión principal máxima, y r es una medida de la fracción de ligamento ocupada por los poros definida como:

$$r = \frac{\sqrt{\frac{3f}{4\pi} \exp(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}}{\frac{\sqrt{\exp(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}}{2}} \quad (3.45)$$

con ε_1 , ε_2 y ε_3 las deformaciones principales. γ y β toman los valores $\gamma = 0,12 + 1,68 N$ y $\beta = 1,2$, siendo N el coeficiente de endurecimiento cuando el material sigue la ley de Ramberg-Osgood de la forma: $(\bar{\sigma} = \sigma_0 (\bar{\varepsilon}^p / \varepsilon_0)^N)$.

- **Condiciones de Kuhn-Tucker** Las condiciones de carga-descarga son:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \dot{\lambda}\Phi = 0 \quad (3.46)$$

- Para el caso de carga elástica o descarga

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (3.47)$$

y el estado de tensiones se encuentra bajo la superficie de fluencia.

- Para el caso de carga plástica, ($\dot{\lambda} > 0$), el estado de tensiones está sobre la superficie de fluencia, $\Phi = 0$, y consecuentemente:

$$\dot{\Phi}(q, p, \bar{\sigma}, f^*) = 0 \quad (3.48)$$

La expresión $\dot{\Phi} = 0$ se conoce como **condición de consistencia**.

Así pues, integrar las ecuaciones constitutivas consiste en obtener la variación con el tiempo de las variables $\lambda, \rho, p, q, f, \mathbf{d}^p, \bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \theta$, que se consigue resolviendo:

- Relación entre tensiones y deformaciones elásticas: ecuación (3.14).
- Variación del límite elástico del material de la matriz: ecuación (3.24).
- Evolución de la deformación plástica: ecuación (3.25).
- Equivalencia del trabajo plástico: ecuación (3.27).
- Velocidad de deformación plástica equivalente: ecuación (3.28).
- Variación de la densidad: ecuación (3.31).
- Variación de la temperatura por disipación plástica: ecuación (3.32).
- Evolución de la porosidad: ecuación (3.34).
- Condiciones de Kuhn-Tucker ecuación (3.46).

3.3. Integración consistente

Las ecuaciones citadas anteriormente: (3.14), (3.24), (3.25), (3.27), (3.28), (3.31), (3.32), (3.34) y (3.46) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que deben ser integradas, en general, por procedimientos numéricos.

Conocidos los valores de las variables en un cierto instante de tiempo t_n y el incremento de deformación total, $\Delta\epsilon$, que se produce entre dos instantes de tiempo consecutivos t y $t + 1$ ($\Delta t = ((t + 1) - t)$), el objetivo es calcular el valor de todas variables en el nuevo instante de tiempo, cumpliendo las condiciones de carga y descarga de Kuhn-Tucker y la condición de consistencia en $t + 1$. Los algoritmos de retorno son los más empleados para realizar esta integración. Dentro de este grupo destacan los algoritmos de proyección al punto más cercano, que son una generalización de los clásicos de retorno radial introducidos por Wilkins [78] para integrar las ecuaciones constitutivas de la plasticidad J_2 .

Estos algoritmos se han usado ampliamente (Hughes y Taylor [79], Golinval [80], Bruhns y Rott [81], Pan [82], Zaera y Fernández-Sáez [83], Fernández [84], entre otros) y se van a utilizar también aquí para la integración de las ecuaciones del modelo de Gurson extendidas a problemas termoviscoplasticos.

La esencia del algoritmo consiste en descomponer las tensiones según:

$$\sigma_{t+1} = \sigma_{t+1}^{trial} - \sigma \Delta^{retorno} \quad (3.49)$$

En una primera fase (predicción elástica) se calcula el valor de σ_{t+1}^{trial} suponiendo que el incremento de deformación total es puramente elástico. Si el valor obtenido para σ_{t+1}^{trial} se encuentra en el dominio elástico, el cálculo finaliza. En caso contrario se debe iniciar la segunda fase (corrección plástica) calculando $\Delta\sigma^{retorno}$, de tal manera que las tensiones σ_{t+1} estén sobre la superficie de fluencia (Φ_{t+1}) al final del incremento, garantizando así la condición de consistencia.

En la figura 3.1 se muestra un esquema básico del funcionamiento del algoritmo.

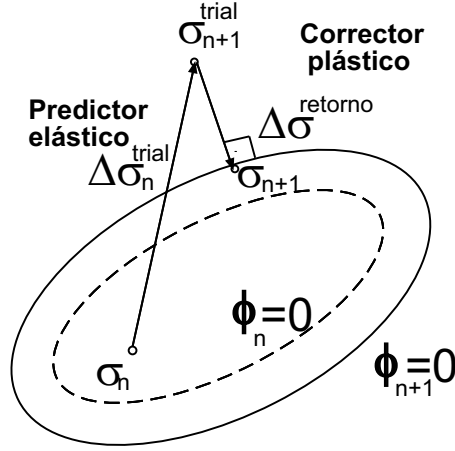


Figura 3.1: Esquema del algoritmo de proyección al punto más cercano

Desde el punto de vista numérico el algoritmo consta de dos etapas: la primera consiste en la discretización de las ecuaciones diferenciales transformándolas en relaciones incrementales algebraicas, para lo cuál se pueden usar métodos explícitos, semi-implícitos o implícitos. Cuando se usa el método implícito de "Diferencias hacia atrás" (Backward-Euler), las ecuaciones algebraicas obtenidas son, en general, no lineales y se resuelven, normalmente, por el método de Newton-Raphson, constituyendo esta parte la segunda etapa del algoritmo.

3.3.1. Tratamiento del problema en grandes deformaciones

En el marco de un código de elementos finitos, esta integración se realiza de manera local en el espacio, es decir, en cada punto de cuadratura de cada uno de los elementos en los que se divide el dominio. La integración incremental es un proceso determinado por la deformación [85] en el que el incremento de deformación total ($\Delta\epsilon = \mathbf{d}\Delta t$) se conoce en cada punto de integración en cada instante de tiempo.

Cuando el problema se formula en grandes deformaciones, la objetividad incremental se garantiza reescribiendo las ecuaciones constitutivas en en una configuración *neutralizada* o *corrotacional* [85, 86]. Esto se puede conseguir a partir de un grupo de rotaciones \mathfrak{R} , tales que:

$$\dot{\mathfrak{R}} = \bar{\omega} \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{R}_{(t=0)} = \mathbf{1} \quad (3.50)$$

siendo $\bar{\omega}$ un tensor espacial antimétrico:

$$\bar{\omega} = -\bar{\omega}^T$$

y

$$\mathfrak{R}^T = \mathfrak{R}^{-1} \quad (3.51)$$

El tensor de tensiones de Cauchy y el tensor de velocidad de deformaciones rotados mediante \mathfrak{R} toman la forma:

$$\sigma_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}^T \sigma \mathfrak{R}, \quad \mathbf{d}_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}^T \mathbf{d} \mathfrak{R} \quad (3.52)$$

y la derivada temporal de la tensión de Cauchy rotada:

$$\dot{\sigma}_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}^T (\dot{\sigma} + \sigma \varpi - \varpi \sigma) \mathfrak{R} = \mathfrak{R}^T \sigma^{\nabla} \mathfrak{R} \quad (3.53)$$

Puede observarse que, si $\bar{\omega}$ coincide con el tensor de espin \mathbf{w} , σ^{∇} se corresponde con la derivada de Jaumann del tensor de tensiones de de Cauchy, mientras que si se elige $\bar{\omega} = \Omega = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$ el tensor de rotación en la descomposición polar del gradiente de deformación \mathbf{F}), entonces σ^{∇} es ahora la derivada de Green-Naghdi-McInnis.

Así pues, en la configuración corrotacional las derivadas objetivas pueden ser calculadas como simples derivadas temporales. Además, teniendo en cuenta la ortogonalidad de \mathfrak{R} , la simetría del tensor de tensiones de Cauchy y la del tensor gradiente de velocidades, así como la isotropía del tensor elástico ($\mathbf{C}_{\mathfrak{R}} = \mathbf{C}$), las ecuaciones constitutivas en la configuración corrotacional son formalmente idénticas a las correspondientes a pequeñas deformaciones, reemplazando las variables espaciales por las variables rotadas.

3.3.2. Discretización de las ecuaciones diferenciales

Dada la ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (3.54)$$

se puede discretizar, utilizando el método Backward-Euler, obteniéndose:

$$y_{t+1} = y_t + \Delta t f(t+1, y_{t+1}) \quad (3.55)$$

donde $\Delta t = (t+1) - t$ es el paso de la integración.

En general, la ecuación (3.55) es no lineal y debe ser resuelta en cada intervalo de integración temporal para encontrar el valor y_{t+1} . La ventaja de los métodos implícitos con respecto a los explícitos es que garantizan estabilidad incondicional, lo que permite poder utilizar un tamaño de paso Δt mayor.

En esta tesis se ha seguido un procedimiento de discretización implícito, basado en el esquema específico para el modelo de Gurson introducido por Aravas en 1987 [87].

La discretización de las ecuaciones diferenciales del modelo se realiza como se indica a continuación.

• Relación Tensión-Deformación

La relación incremental entre tensiones de Cauchy y deformaciones (ecuación (3.14)), es de la forma:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\theta) \quad (3.56)$$

y la tensión en el instante $t+1$ puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\theta \quad (3.57)$$

Se define el predictor elástico de la tensión en $t+1$ $\boldsymbol{\sigma}_{t+1}^{trial}$ como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+1}^{trial} \equiv \boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.58)$$

La expresión (3.57), en función del predictor elástico y de la deformación plástica y térmica toma la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^{trial} - \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\theta \quad (3.59)$$

con:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\theta = \alpha \Delta \theta \mathbf{1} \quad (3.60)$$

- **Evolución de la deformación plástica**

Descomponiendo el gradiente $\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma}$ en sus componentes hidrostática y desviadora, la regla de normalidad puede escribirse en forma incremental como:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \Delta\lambda \left[\frac{\partial\Phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial\Phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right] \quad (3.61)$$

o lo que es lo mismo:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\lambda \left[-\frac{1}{3} \frac{\partial\Phi}{\partial p} \mathbf{1} + \frac{3}{2q} \frac{\partial\Phi}{\partial q} \mathbf{S} \right] \quad (3.62)$$

Para el tratamiento del problema cuando es desacoplado en su partes hidrostática y desviadora, Aravas [87] introdujo las siguientes dos nuevas variables:

$$\Delta\varepsilon_p = -\Delta\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial p} \quad (3.63)$$

$$\Delta\varepsilon_q = \Delta\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial q} \quad (3.64)$$

Eliminando $\Delta\lambda$ de las ecuaciones anteriores y operando, se obtiene la expresión:

$$\Delta\varepsilon_p \frac{\partial\Phi}{\partial q} + \Delta\varepsilon_q \frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0 \quad (3.65)$$

La ecuación (3.62) de la variación de la deformación plástica se escribe, en función de las variables $\Delta\varepsilon_p$ y $\Delta\varepsilon_q$ definidas en (3.63) y (3.64), como:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{3} \Delta\varepsilon_p \mathbf{1} + \frac{3}{2q} \Delta\varepsilon_q \mathbf{S} \quad (3.66)$$

Operando en la ecuación (3.59) con (3.60) y (3.66), se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^{trial} - [K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\mathbf{I}^{dev}] : \left[\left(\frac{1}{3} \Delta\varepsilon_p \mathbf{1} + \frac{3}{2q} \Delta\varepsilon_q \mathbf{S} \right) + (\alpha \Delta\theta \mathbf{1}) \right] \quad (3.67)$$

y reordenando términos:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^{trial} - K \Delta\varepsilon_p \mathbf{1} - 2G \Delta\varepsilon_q \mathbf{N}_{t+1} - 3\alpha K \Delta\theta \mathbf{1} \quad (3.68)$$

siendo \mathbf{N} un tensor desviador unitario de expresión:

$$\mathbf{N} = \frac{3\mathbf{S}}{q} \quad (3.69)$$

Separando la componente hidrostática y la desviadora del tensor de tensiones en la ecuación (3.68), se cumple que:

$$p_{t+1} = p_{t+1}^{trial} + K\Delta\varepsilon_p + 3\alpha K\Delta\theta \quad (3.70)$$

$$\mathbf{S}_{t+1} = \mathbf{S}^{trial} - \frac{3G\Delta\varepsilon_q \mathbf{S}_{t+1}}{q_{t+1}} \quad (3.71)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{trial} &= \boldsymbol{\sigma}^{trial} + p^{trial} : \mathbf{1} \\ p^{trial} &= -\frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}^{trial} : \mathbf{1} \\ q^{trial} &= \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}^{trial} : \mathbf{S}^{trial}} = q_{t+1} + 3G\Delta\varepsilon_q \end{aligned} \quad (3.72)$$

A partir de (3.71) y (3.72), se puede comprobar la proporcionalidad existente entre \mathbf{S}_{t+1} y \mathbf{S}^{trial} :

$$\frac{\mathbf{S}}{q} = \frac{\mathbf{S}^{trial}}{q^{trial}} \quad (3.73)$$

o lo que es lo mismo, la igualdad entre los tensores desviadores unitarios \mathbf{N}_{t+1} y \mathbf{N}^{trial} . Este hecho simplifica notablemente los cálculos ya que si bien \mathbf{S}_{t+1} no es conocido a priori, sí lo es \mathbf{S}^{trial} , lo que permite simplificar la ecuación (3.71) para escribir:

$$q_{t+1} = q_{t+1}^{trial} - 3G\Delta\varepsilon_q \quad (3.74)$$

En la ecuación (3.68), el predictor elástico $\boldsymbol{\sigma}_{t+1}^{trial}$ se corrige de forma que las tensiones retornan a la superficie de fluencia actualizada. En el espacio desviador y aplicando el algoritmo de retorno radial, la dirección de retorno a la superficie de fluencia es siempre según la normal unitaria \mathbf{N} (figura 3.2). Este método fue también empleado por [88].

- **Equivalencia del trabajo plástico**

La relación incremental correspondiente a la ecuación (3.27) es de la forma:

$$\begin{aligned} (1-f)\bar{\sigma}\Delta\bar{\varepsilon}^p &= \boldsymbol{\sigma} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = (\mathbf{S} - p\mathbf{1}) : \left(\frac{1}{3}\Delta\varepsilon_p \mathbf{1} + \frac{3}{2q}\Delta\varepsilon_q \mathbf{S} \right) \\ &= -p\Delta\varepsilon_p + q\Delta\varepsilon_q \end{aligned} \quad (3.75)$$

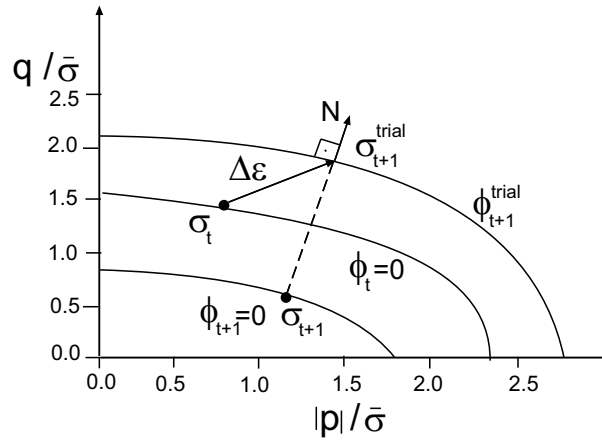


Figura 3.2: Representación esquemática del algoritmo de retorno a la superficie de fluencia en el espacio p-q.

- Relación entre $\bar{\varepsilon}^p$ y $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p \Delta t = \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (3.76)$$

- Variación de la densidad

$$\Delta \rho + \rho \Delta \varepsilon : \mathbf{1} = 0 \quad (3.77)$$

- Variación de la temperatura por disipación plástica

$$\rho C_p \Delta \theta = \chi \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \chi (q \Delta \varepsilon_q - p \Delta \varepsilon_p) \quad (3.78)$$

- Evolución de la porosidad

$$\begin{aligned} \Delta f &= (1 - f) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathbf{1} + A \Delta \bar{\varepsilon}^p + B (\Delta \bar{\sigma} - \Delta p) = \\ &= (1 - f) \Delta \varepsilon_p + A \Delta \bar{\varepsilon}^p + B (\Delta \bar{\sigma} - \Delta p) \end{aligned} \quad (3.79)$$

- Condiciones de Kuhn-Tucker

1. Si $\Phi(q^{trial}, p^{trial}, \bar{\sigma}_t, f_t^*) \leq 0$, entonces, en el instante $(t + \Delta t)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^{trial} \equiv \boldsymbol{\sigma}|_t + \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ p &= p^{trial} \equiv -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}^{trial} : \mathbf{1} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}^{trial} \equiv \boldsymbol{\sigma}^{trial} + p^{trial} \mathbf{1} \\ q &= q^{trial} \equiv \left[\frac{3}{2} \mathbf{S}^{trial} : \mathbf{S}^{trial} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.80)$$

y las variables de estado $\rho, \bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, f$ y θ no cambian (tienen el mismo valor que en el instante anterior).

2. Si $\Phi(q^{trial}, p^{trial}, \bar{\sigma}_t, f_t^*) > 0$, entonces, en el instante $(t + \Delta t)$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}|_t + \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\theta) \neq \boldsymbol{\sigma}^{trial} \\ \Phi(q|_{t+1}, p|_{t+1}, \bar{\sigma}_{t+1}, f^*|_{t+1}) &= 0\end{aligned}$$

y el valor de las variables de estado cambia con respecto al instante anterior y se actualiza.

3.3.3. Resolución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales

El proceso de discretización recogido en el apartado anterior conduce al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas no lineales:

1. **Relación entre $\Delta \varepsilon_p$ y $\Delta \varepsilon_q$**

$$\Delta \varepsilon_p \Phi_q + \Delta \varepsilon_q \Phi_p = 0 \quad (3.81)$$

2. **Leyes de evolución de las variables de estado:**

- a) Variación de la densidad :

$$\Delta \rho + \rho \Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{1} = 0 \quad (3.82)$$

- b) Variación de la temperatura por disipación plástica :

$$\Delta \theta = \frac{\chi(q \Delta \varepsilon_q - p \Delta \varepsilon_p)}{\rho C_p} \quad (3.83)$$

- c) Evolución de la porosidad:

$$\Delta f = (1 - f) \Delta \varepsilon_p + A \Delta \bar{\varepsilon}^p + B (\Delta \bar{\sigma} - \Delta p) \quad (3.84)$$

- d) Variación de $\bar{\varepsilon}^p$:

$$\Delta \bar{\varepsilon}^p = \dot{\bar{\varepsilon}}^p \Delta t \quad (3.85)$$

e) Equivalencia del trabajo plástico:

$$\Delta \bar{\varepsilon}^p = \frac{-p\Delta \varepsilon_p + q\Delta \varepsilon_q}{(1-f)\bar{\sigma}} \quad (3.86)$$

Este conjunto de ecuaciones se puede representar de una manera compacta mediante:

$$\Delta H^\alpha = h^\alpha(\Delta \varepsilon_p, \Delta \varepsilon_q, p, q, H^\beta) \quad (3.87)$$

siendo H^α cada una de las variables de estado del material, y h^α las leyes de evolución, en función de p , q , $\Delta \varepsilon_p$, $\Delta \varepsilon_q$ y el resto de variables de estado H^β

3. Condiciones de Kuhn-Tucker para $\lambda > 0$:

$$\Phi(q, p, H^\alpha) = 0 \quad (3.88)$$

El sistema se resuelve ahora aplicando el método de Newton-Raphson, que, en esencia, consiste en lo siguiente.

Dada la ecuación no lineal:

$$\begin{cases} F(\Delta x) = G(x) = 0 & \Delta x = x_{t+1} - x_t \\ x|_t = x_0 \end{cases}$$

se puede aproximar, desarrollando en serie de Taylor y reteniendo únicamente el primer término, mediante

$$G(x)^{(s)} + \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{(s)} \delta x^{(s)} = 0 \quad (3.89)$$

de donde se puede obtener la variable $\delta x^{(s)}$ como:

$$\delta x^{(s)} = -\frac{G^{(s)}}{\left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{(s)}} \quad (3.90)$$

y el valor de x en el paso de iteración (s+1):

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} + \delta x^{(s)} \quad (3.91)$$

El proceso de iteración se repite hasta que el valor de $G(x)^{(s)}$ es inferior a un valor prefijado de antemano, momento en que se toma para x el valor final:

$$x_{t+1} = x^{(s+1)} \quad (3.92)$$

En el problema que aquí se analiza la variable $\delta x^{(s)}$ se puede considerar un vector que incluye las variables: $\rho^{(s)}$, $\bar{\varepsilon}^{p(s)}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p(s)}$, $f^{(s)}$, $\theta^{(s)}$, $\Delta\varepsilon_p^{(s)}$ y $\Delta\varepsilon_q^{(s)}$. El procedimiento de linealización de las diferentes ecuaciones que conduce a su solución se detalla a continuación.

Para resolver el sistema de ecuaciones que resulta de la linealización de la ecuación 3.81 a la ecuación 3.88, y obtener el valor de las variables $\delta x^{(s)}$, se puede proceder a resolver el sistema de 7 ecuaciones con 7 incógnitas por diferentes procedimientos:

- El más sencillo consiste en invertir la matriz de coeficientes del sistema, pero esto conlleva un coste computacional elevado, ya que es necesario invertir una matriz (7x7) en cada paso de iteración (s).
- Otra forma de resolver el sistema es la planteada por Aravas [87], más complicada de implementar pero con la ventaja de obtener la solución sin necesidad de invertir ninguna matriz. Este método consiste en plantear las ecuaciones de evolución de las variables de estado (de la ecuación 3.82 a la ecuación 3.86) $\delta H^{\alpha(s)}$ en función de $\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)}$, y $\delta\Delta\varepsilon_q^{(s)}$ exclusivamente, e introducir las soluciones $\delta H^{\alpha(s)}$, función de $\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)}$ y $\delta\Delta\varepsilon_q^{(s)}$, en la expresión (3.81) y (3.88) linealizadas para obtener los valores de $\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)}$ y $\delta\Delta\varepsilon_q^{(s)}$ y del resto de variables en cada paso de iteración (s).

Se detalla a continuación este último procedimiento de resolución del sistema de ecuaciones (3.81-3.88), en un paso de iteración (s):

1. Relación entre $\Delta\varepsilon_p$ y $\Delta\varepsilon_q$:

$$\begin{aligned} & \delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} \frac{\partial\Phi}{\partial q} \Big|_s + \Delta\varepsilon_p^{(s)} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q^2} \Big|_s \delta q^{(s)} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial q\partial p} \Big|_s \delta p^{(s)} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2\Phi}{\partial q\partial H^\alpha} \Big|_s \delta H^{\alpha(s)} \right) + \\ & + \delta\Delta\varepsilon_q^{(s)} \frac{\partial\Phi}{\partial p} \Big|_s + \Delta\varepsilon_q^{(s)} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q\partial p} \Big|_s \delta q^{(s)} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial p^2} \Big|_s \delta p^{(s)} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2\Phi}{\partial p\partial H^\alpha} \Big|_s \delta H^{\alpha(s)} \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.93)$$

2. Leyes de evolución de las variables de estado:

$$\begin{aligned} \delta H^{\alpha(s)} = & \frac{\partial h^\alpha}{\partial p} \delta p^{(s)} + \frac{\partial h^\alpha}{\partial q} \delta q^{(s)} + \frac{\partial h^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_p} \delta \Delta \varepsilon_p^{(s)} + \frac{\partial h^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q} \delta \Delta \varepsilon_q^{(s)} + \\ & + \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial h^\alpha}{\partial H^\beta} \delta H^{\beta(s)} \end{aligned} \quad (3.94)$$

3. Condiciones de Kuhn-Tucker para $\lambda > 0$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right|_s \delta q^{(s)} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right|_s \delta p^{(s)} + \sum_{\alpha=1}^n \left. \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} \right|_s \delta H^{\alpha(s)} = 0 \quad (3.95)$$

A partir de (3.70) y (3.74) es fácil obtener:

$$\begin{aligned} \delta p^{(s)} &= K \delta \Delta \varepsilon_p^{(s)} + 3\alpha K \delta \theta^{(s)} \\ \delta q^{(s)} &= -3G \delta \Delta \varepsilon_q^{(s)} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Introduciendo las ecuaciones de (3.96) en las leyes de evolución, es posible obtener la variación de las variables de estado de (3.94) de la siguiente forma:

$$\delta H^{\alpha(s)} = h_{\alpha 0}^{(s)} + h_{\alpha 1}^{(s)} \delta \Delta \varepsilon_p^{(s)} + h_{\alpha 2}^{(s)} \delta \Delta \varepsilon_q^{(s)} \quad (3.97)$$

con $h_{\alpha 0}^{(s)}$, $h_{\alpha 1}^{(s)}$ y $h_{\alpha 2}^{(s)}$ conocido. Entrando con (3.70), (3.74) y (3.97) en el sistema de ecuaciones formado por (3.93) y (3.95), éste puede ser escrito de la forma:

$$A_{11}^{(s)} \delta \Delta \varepsilon_p^{(s)} + A_{12}^{(s)} \delta \Delta \varepsilon_q^{(s)} = B_{10}^{(s)} \quad (3.98)$$

$$A_{21}^{(s)} \delta \Delta \varepsilon_p^{(s)} + A_{22}^{(s)} \delta \Delta \varepsilon_q^{(s)} = B_{20}^{(s)} \quad (3.99)$$

con $A_{11}^{(s)}$, $A_{12}^{(s)}$, $A_{21}^{(s)}$, $A_{22}^{(s)}$, $B_{10}^{(s)}$ y $B_{20}^{(s)}$ conocidos.

El método detallado de obtención de estos parámetros se muestra en el Anexo II.

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, $\delta \Delta \varepsilon_p^{(s)}$ y $\delta \Delta \varepsilon_q^{(s)}$ toman los valores:

$$\delta \Delta \varepsilon_p^{(s)} = \frac{B_{10}^{(s)} A_{22}^{(s)} - B_{20}^{(s)} A_{12}^{(s)}}{A_{11}^{(s)} A_{22}^{(s)} - A_{21}^{(s)} A_{12}^{(s)}} \quad (3.100)$$

$$\delta \Delta \varepsilon_q^{(s)} = \frac{B_{10}^{(s)} A_{21}^{(s)} - B_{20}^{(s)} A_{11}^{(s)}}{A_{21}^{(s)} A_{12}^{(s)} - A_{11}^{(s)} A_{22}^{(s)}} \quad (3.101)$$

y a partir de (3.100) y (3.101), los valores de $\delta H^{\alpha(s)}$ en (3.97) quedan completamente definidos para todas las variables de estado en (s) sin necesidad de invertir ninguna matriz, con el consiguiente ahorro computacional.

Una vez conseguida la solución del sistema de ecuaciones no lineales al alcanzarse la precisión requerida en la iteración (s), se está en disposición de actualizar todas las variables.

Las variables del problema, en el tiempo $t + 1$, quedan como sigue:

$$\begin{aligned}
 \Delta \varepsilon_{p_{t+1}} &= \Delta \varepsilon_p^{(s)} \\
 \Delta \varepsilon_{q_{t+1}} &= \Delta \varepsilon_q^{(s)} \\
 \theta_{t+1} &= \theta^{(s)} \\
 \rho_{t+1} &= \rho^{(s)} \\
 \bar{\varepsilon}_{t+1}^p &= \bar{\varepsilon}^{p(s)} \\
 \dot{\bar{\varepsilon}}_{t+1}^p &= \dot{\bar{\varepsilon}}^{p(s)} \\
 \bar{\sigma}_{t+1} &= \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{p(s)}, \dot{\bar{\varepsilon}}^{p(s)}, \theta^{(s)}) \\
 p_{t+1} &= p^{trial} + K \Delta \varepsilon_p^{(s)} + 3\alpha K(\theta^{(s)} - \theta|_0) \\
 q_{t+1} &= q^{trial} - 3G \Delta \varepsilon_q^{(s)} \\
 \Delta \varepsilon_{t+1}^p &= \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_p^{(s)} \mathbf{1} + \Delta \varepsilon_q^{(s)} \mathbf{N}^{trial} \\
 \sigma_{t+1} &= \frac{2}{3} q_{t+1} \mathbf{N}^{trial} - p_{t+1} \mathbf{1}
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

y el valor de todas las variables es conocido en (t+1) sin necesidad de invertir ninguna matriz

3.4. Definición del Jacobiano

El Jacobiano o módulo de linealización se define como la relación entre las derivadas del tensor de tensiones y el tensor de deformaciones totales:

$$J = \left(\frac{\delta \sigma}{\delta \varepsilon} \right)_{t+1} = \left(\frac{\delta \Delta \sigma}{\delta \Delta \varepsilon} \right)_{t+1} \tag{3.103}$$

Para problemas elastoplásticos, la consistencia entre el módulo tangente y los algoritmos de integración empleados en la solución de los problemas incrementales juega un

papel crucial en preservar la convergencia cuadrática de los esquemas de solución iterativa basadas en el método de Newton-Raphson. El valor del Jacobiano depende del algoritmo usado para la integración de las ecuaciones constitutivas y es, en general, diferente del llamado módulo tangente elastoplástico.

El llamado módulo tangente consistente se define por la diferenciación exacta de las ecuaciones constitutivas al final del paso $t + 1$.

Su cálculo se hace necesario en los análisis de tipo implícito, como el utilizado en el código ABAQUS/Standard [89].

La tensión de Cauchy, en el paso temporal $t + 1$ se escribe, en función de los incrementos de deformación total, plástica y térmica, como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{C} : \boldsymbol{\Delta\epsilon} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\Delta\epsilon}^p - \mathbf{C} : \boldsymbol{\Delta\epsilon}^\theta \quad (3.104)$$

y diferenciando esta expresión:

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \delta\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{C} : \delta\boldsymbol{\epsilon}^p - \mathbf{C} : \delta\boldsymbol{\epsilon}^\theta = \\ &= \mathbf{C} : \delta\boldsymbol{\epsilon} - K\delta\Delta\epsilon_p \mathbf{1} - 2G\delta(\Delta\epsilon_q \mathbf{N}) - 3\alpha K\delta\theta \mathbf{1} \\ &= (K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\mathbf{I}^{dev}) \delta\boldsymbol{\epsilon} - K\delta\Delta\epsilon_p \mathbf{1} - 2G\delta\Delta\epsilon_q \mathbf{N} - \\ &\quad - 2G\Delta\epsilon_q \delta\mathbf{N} - 3\alpha K\delta\theta \mathbf{1} \end{aligned} \quad (3.105)$$

La igualdad de tensores $\mathbf{N} = \mathbf{N}^{trial}$ implica que:

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= p_{t+1}^{trial} + K\Delta\epsilon_p + 3\alpha K\Delta\theta \\ q_{t+1} &= q_{t+1}^{trial} - 3G\Delta\epsilon_q \end{aligned} \quad (3.106)$$

y por tanto se cumple:

$$\begin{aligned} \delta p &= \delta p^{trial} + K\delta\Delta\epsilon_p + 3\alpha K\delta\theta \\ \delta q &= \delta q^{trial} - 3G\delta\Delta\epsilon_q \end{aligned} \quad (3.107)$$

La diferenciación de las ecuaciones (3.65), (3.87) y (3.81) conduce a:

1. Diferenciación de la relación entre $\Delta\varepsilon_p$ y $\Delta\varepsilon_q$.

$$\begin{aligned} \delta\Delta\varepsilon_p \frac{\partial\Phi}{\partial q} + \Delta\varepsilon_p \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q^2} \delta q + \frac{\partial^2\Phi}{\partial q \partial p} \delta p + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2\Phi}{\partial q \partial H^\alpha} \delta H^\alpha \right) + \\ + \delta\Delta\varepsilon_q \frac{\partial\Phi}{\partial p} + \Delta\varepsilon_q \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q \partial p} \delta q + \frac{\partial^2\Phi}{\partial p^2} \delta p + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2\Phi}{\partial p \partial H^\alpha} \delta H^\alpha \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

2. Diferenciación de la evolución de las variables de estado.

$$\delta H^\alpha = \frac{\partial h^\alpha}{\partial p} \delta p + \frac{\partial h^\alpha}{\partial q} \delta q + \frac{\partial h^\alpha}{\partial \Delta\varepsilon_p} \delta\Delta\varepsilon_p + \frac{\partial h^\alpha}{\partial \Delta\varepsilon_q} \delta\Delta\varepsilon_q + \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial h^\alpha}{\partial H^\beta} \delta H^\beta \quad (3.109)$$

3. Diferenciación de la condición $\Phi = 0$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q} \delta q + \frac{\partial\Phi}{\partial p} \delta p + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial H^\alpha} \delta H^\alpha = 0 \quad (3.110)$$

Introduciendo las ecuaciones (3.107) en las ecuaciones (3.109), éstas pueden escribirse de la forma:

$$\delta H^\alpha = h_{\alpha 1} \delta\Delta\varepsilon_p + h_{\alpha 2} \delta\Delta\varepsilon_q + h_{\alpha 3} \delta p^{trial} + h_{\alpha 4} \delta q^{trial} \quad (3.111)$$

con $h_{\alpha 1}$, $h_{\alpha 2}$, $h_{\alpha 3}$ y $h_{\alpha 4}$ conocidas, y utilizando estos valores y las relaciones de (3.107) en 3.108 y 3.110, se puede obtener un sistema de ecuaciones que relaciona las variables $\delta\Delta\varepsilon_p$ y $\delta\Delta\varepsilon_q$ con δp^{trial} y δq^{trial} .

$$A_{11} \delta\Delta\varepsilon_p + A_{12} \delta\Delta\varepsilon_q = B_{11} \delta p^{trial} + B_{12} \delta q^{trial} \quad (3.112)$$

$$A_{21} \delta\Delta\varepsilon_p + A_{22} \delta\Delta\varepsilon_q = B_{21} \delta p^{trial} + B_{22} \delta q^{trial} \quad (3.113)$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \delta\Delta\varepsilon_p &= C_{11} \delta p^{trial} + C_{12} \delta q^{trial} \\ \delta\Delta\varepsilon_q &= C_{21} \delta p^{trial} + C_{22} \delta q^{trial} \end{aligned} \quad (3.114)$$

con las constantes C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} conocidas e igual a:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{B_{21}A_{12} - B_{11}A_{22}}{A_{21}A_{12} - A_{11}A_{22}} & C_{12} &= \frac{B_{22}A_{12} - B_{12}A_{22}}{A_{21}A_{12} - A_{11}A_{22}} \\ C_{21} &= \frac{B_{21}A_{11} - B_{11}A_{21}}{A_{22}A_{11} - A_{12}A_{21}} & C_{22} &= \frac{B_{22}A_{11} - B_{12}A_{21}}{A_{22}A_{11} - A_{12}A_{21}} \end{aligned} \quad (3.115)$$

Las leyes de evolución de las variables de estado de 3.111 pueden escribirse en función de las variables C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} como:

$$\delta H^\alpha = (h_{\alpha 1} C_{11} + h_{\alpha 2} C_{21} + h_{\alpha 3}) \delta p^{trial} + (h_{\alpha 1} C_{12} + h_{\alpha 2} C_{22} + h_{\alpha 4}) \delta q^{trial} \quad (3.116)$$

y en concreto la variable de estado $\delta \theta$:

$$\delta \theta = C_{31} \delta p^{trial} + C_{32} \delta q^{trial} \quad (3.117)$$

con los valores de C_{31} y C_{32} calculados según (3.116).

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \delta p^{trial} &= -K \delta \varepsilon_{kk} \\ \delta q^{trial} &= \frac{3}{2q^{trial}} \mathbf{S}^{trial} : \delta \mathbf{S}^{trial} \\ \delta \mathbf{S}^{trial} &= 2G \delta \mathbf{e} \\ \delta \mathbf{e} &= \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \delta \varepsilon_{kk} \mathbf{1} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{N}^{trial} = \frac{3}{2q^{trial}} \mathbf{S}^{trial} \\ \delta \mathbf{N} &= \delta \mathbf{N}^{trial} = -\frac{3}{2q^{trial2}} dq^{trial} \mathbf{S}^{trial} + \frac{3}{2q^{trial}} \delta \mathbf{S}^{trial} \end{aligned} \quad (3.118)$$

la ecuación (3.105) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\sigma} &= K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \delta \boldsymbol{\varepsilon} + 2G \mathbf{I}^{dev} \delta \boldsymbol{\varepsilon} + K^2 C_{11} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{3KG}{q^{trial}} C_{21} \mathbf{1} \otimes \mathbf{S}^{trial} \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \\ &- \frac{3KG}{q^{trial}} C_{12} \mathbf{S}^{trial} \otimes \mathbf{1} \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{9G^2}{q^{trial2}} C_{22} \mathbf{S}^{trial} \otimes \mathbf{S}^{trial} \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{6G^2 \Delta \varepsilon_q}{q^{trial}} \mathbf{I}^{dev} \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \\ &+ \frac{9G^2 \Delta \varepsilon_q}{q^{trial3}} \mathbf{S}^{trial} \otimes \mathbf{S}^{trial} \delta \boldsymbol{\varepsilon} + 3\alpha K^2 C_{31} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{9\alpha KG}{q^{trial}} C_{32} \mathbf{1} \otimes \mathbf{S}^{trial} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

y agrupando términos y operando se obtiene la expresión del Jacobiano:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \boldsymbol{\sigma}}{\delta \boldsymbol{\varepsilon}} &= K(1 + KC_{11} + 3\alpha KC_{31}) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \left(2G - 6 \frac{G^2 \Delta \varepsilon_q}{q^{trial}} \right) \mathbf{I}^{dev} + \\ &+ \frac{3KG}{q^{trial}} (C_{21} - 3\alpha C_{32}) \mathbf{1} \otimes \mathbf{S}^{trial} - \frac{3KG}{q^{trial}} C_{12} \mathbf{S}^{trial} \otimes \mathbf{1} + \\ &+ 9 \frac{G^2}{q^{trial2}} \left(-C_{22} + \frac{\Delta \varepsilon_q}{q^{trial}} \right) \mathbf{S}^{trial} \otimes \mathbf{S}^{trial} \end{aligned} \quad (3.119)$$

siendo G y K las constantes elásticas del material, α el coeficiente de expansión térmica, y C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} , C_{31} y C_{32} los valores calculados en (3.115) y (3.116).

El valor de cada una de las constantes del Jacobiano puede encontrarse en el Anexo III.

Como puede observarse, el Jacobiano no es en general simétrico, lo que desde el punto de vista numérico supone un aumento considerable en el tiempo de cálculo computacional.

En la configuración espacial, la expresión de la tensión se obtiene a partir de la rotada por la expresión: \mathfrak{R}_{t+1}

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \mathfrak{R}_{t+1} \boldsymbol{\sigma}_{\mathfrak{R}_{t+1}} \mathfrak{R}_{t+1}^T \quad (3.120)$$

y la matriz tangente consistente, \mathbf{J} , a partir del operador rotado $\mathbf{J}_{\mathfrak{R}}$ a través de \mathfrak{R}_{t+1} como:

$$(\mathbf{J})_{ijkl} = (\mathfrak{R}_{t+1})_{iI} (\mathfrak{R}_{t+1})_{jJ} (\mathfrak{R}_{t+1})_{kK} (\mathfrak{R}_{t+1})_{lL} (\mathbf{J}_{\mathfrak{R}})_{IJKL} \quad (3.121)$$

3.5. Implementación en ABAQUS

El algoritmo de integración desarrollado ha sido implementado en el código comercial de elementos finitos implícito ABAQUS/Standard [89] a través de la subrutina de usuario UMAT. En la figura 3.3 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo implementado.

También el algoritmo se ha implementado en el código ABAQUS/Explicit [90] con la subrutina de usuario VMAT que, a diferencia del anterior, integra mediante métodos explícitos las ecuaciones del movimiento. En este caso no se requiere la programación del cálculo del Jacobiano.

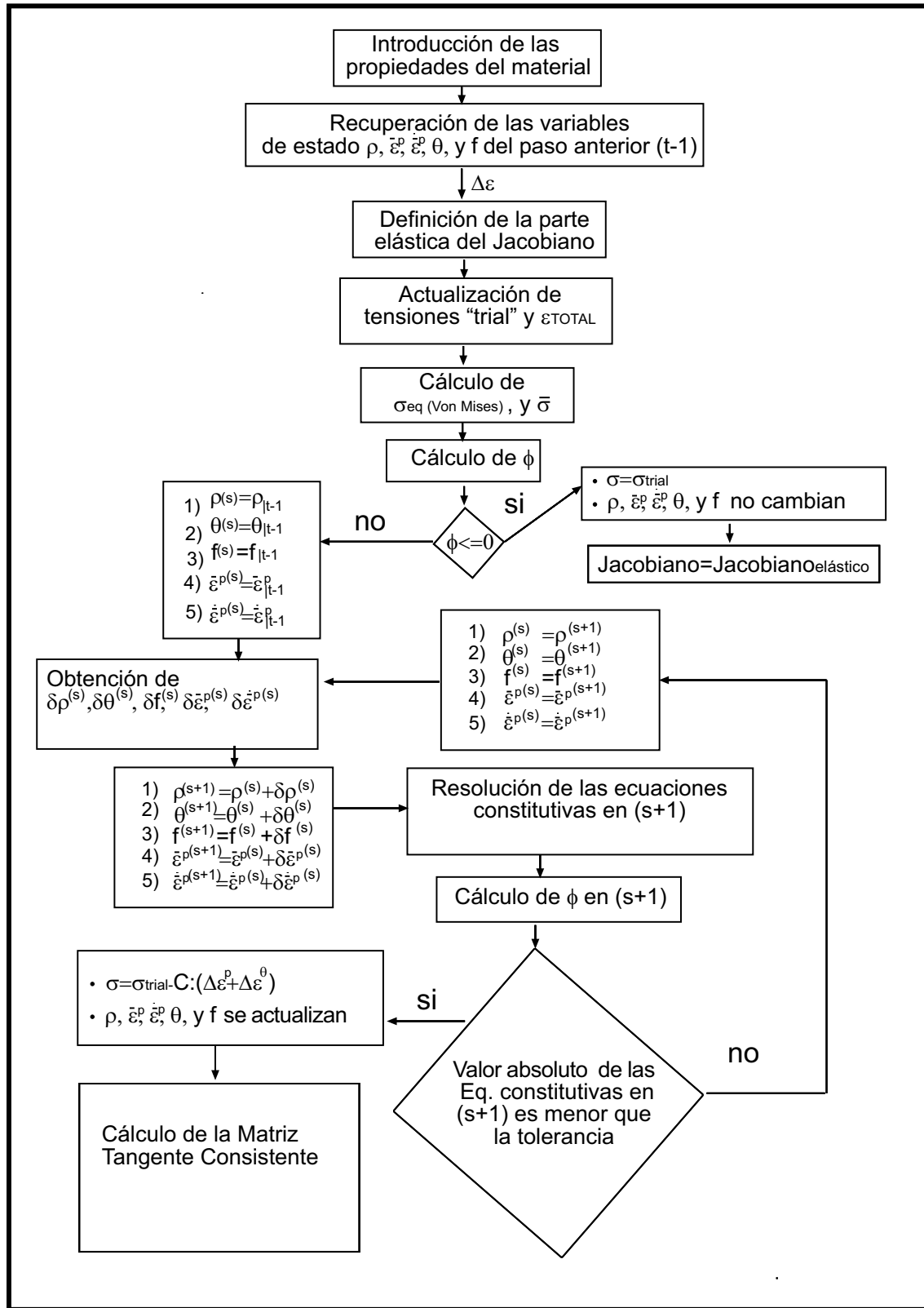


Figura 3.3: Diagrama de flujo de la subrutina UMAT

3.6. Resultados numéricos

Se ha comprobado el funcionamiento del algoritmo propuesto implementandolo en el código comercial de elementos finitos ABAQUS/Standard [89] mediante el análisis del comportamiento de un único elemento tipo C3D8H sometido a las tres siguientes condiciones de carga (figura 3.4):

- (i) tensión uniaxial
- (ii) expansión volumétrica
- (iii) tensión uniaxial restringida

Estos tres casos fueron anteriormente analizados por Worswick y Pelletier [40] y Betegón et al. [43] en deformación plana, y los dos primeros también fueron elegidos por Aravas [87], para tensión plana (tensión uniaxial) y en 3D en condiciones estáticas (expansión volumétrica)

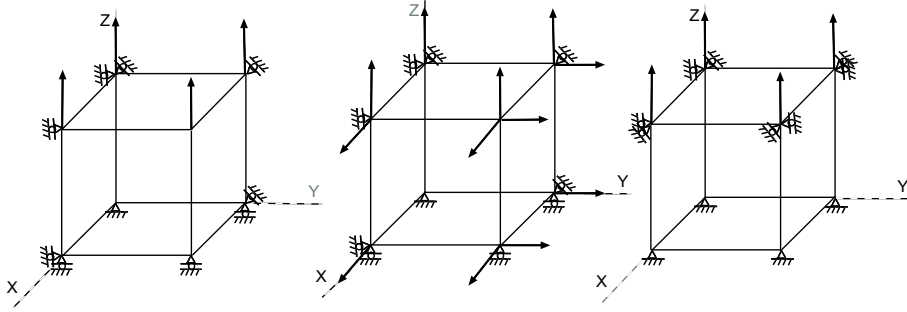


Figura 3.4: Casos con un único elemento y condiciones de contorno: i) tensión uniaxial, ii) expansión volumétrica, iii) tensión uniaxial restringida

Los materiales que se han utilizado en la modelización han sido el Acero 4340 (material A) y el hierro ARCMO (material B). El límite elástico de ambos materiales varía con $\bar{\epsilon}^p$, $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ y θ de acuerdo con la ley de Johnson Cook, [91] cuya ecuación es:

- para el caso de $\dot{\bar{\epsilon}}^p < \dot{\bar{\epsilon}}_0$:

$$\bar{\sigma} = (K_1 + K_2 (\bar{\epsilon}^p)^n) (1 - \theta^{*m}) \quad (3.122)$$

- para el caso de $\dot{\bar{\epsilon}}^p \geq \dot{\bar{\epsilon}}_0$:

$$\bar{\sigma} = (K_1 + K_2 (\bar{\epsilon}^p)^n) \left(1 + K_3 \log \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right) \right) (1 - \theta^{*m}) \quad (3.123)$$

donde θ^* es la temperatura homóloga definida por:

$$\theta^* = \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \quad (3.124)$$

con T_0 y T_m la temperatura ambiente y la temperatura de fusión respectivamente. K_1 , K_2 , n , $\dot{\bar{\epsilon}}_0$, m son propiedades del material, las cuales vienen dadas en la tabla 3.1. Los parámetros del modelo de Gurson para cada material aparecen en la tabla 3.2. En la modelización únicamente se ha considerado nucleación controlada por deformación.

	Material A Acero 4340	Material B Hierro Armco
$E(MPa)$	208000	209000
ν	0,3	0,3
$\rho_0(kg/m^3)$	7830	7890
$K_1(MPa)$	792	175
$K_2(MPa)$	510	380
n	0,26	0,23
K_3	0,014	0,06
$\dot{\bar{\epsilon}}_0(s^{-1})$	1	1
m	1,03	0,55
$T_0(K)$	298	294
$T_m(K)$	1793	1811
χ	0,9	0,9
$C_p(m^2/s^2/K)$	477	452
$\alpha(K^{-1})$	$1,2 \times 10^{-5}$	$1,2 \times 10^{-5}$

Tabla 3.1: Propiedades de los materiales

Las dimensiones iniciales de los elementos analizados l_x^0 , l_y^0 y l_z^0 fueron de 1 mm, y la velocidad de deformación ingenieril $\dot{\epsilon}_z = v_z/l_z^0$ tomaron valores de 1, 10^2 , y $10^4 s^{-1}$.

Los resultados correspondientes al primer caso de carga (tensión uniaxial) se presentan en la figura 3.5. Se dibuja para ambos materiales la tensión uniaxial, normalizada con el límite elástico σ_0 , en función de la deformación uniaxial para diferentes valores de velocidad de deformación con y sin tener en cuenta los efectos térmicos.

	Material A Acero 4340	Material B Hierro Armco
q_1	1,5	1,25
q_2	1,0	0,95
f_0	0,004	0,0004
f_N	0,1	0,005
s_N	0,3	0,025
ε_n	0,1	0,05
f_F	0,2025	0,06

Tabla 3.2: Propiedades del modelo de Gurson de los materiales

Para el caso de expansión volumétrica, en la figura 3.6 se representa para ambos materiales y para diferentes velocidades de deformación la variación de la tensión hidrostática, normalizada con el límite elástico inicial σ_0 , en función de la deformación logarítmica volumétrica ($e_v = 3\ln(1 + u/l_z^0)$), siendo u el desplazamiento en las tres direcciones -del mismo valor en este caso de carga- con y sin tener en cuenta el efecto de la temperatura.

Para el tercer estado de carga (tensión uniaxial restringida), la figura 3.7 muestra la tensión axial, normalizada con σ_0 como función de la deformación axial, para diferentes valores de velocidad de deformación considerando y sin considerar efectos térmicos

En todos los casos los resultados muestran cómo la velocidad de deformación incrementa tanto la tensión máxima alcanzada como el valor de deformación en el que se presenta el valor máximo de tensión.

El ablandamiento debido a la temperatura se observa claramente en el primer caso de carga (tensión uniaxial) para el Hierro Armco (material B). Este efecto más acusado en este material, está en consonancia con su mayor aumento del parámetro que afecta al límite elástico $(\theta^*)^m$. Para el resto de casos de carga, el efecto térmico es despreciable comparado con el correspondiente a la velocidad de deformación.

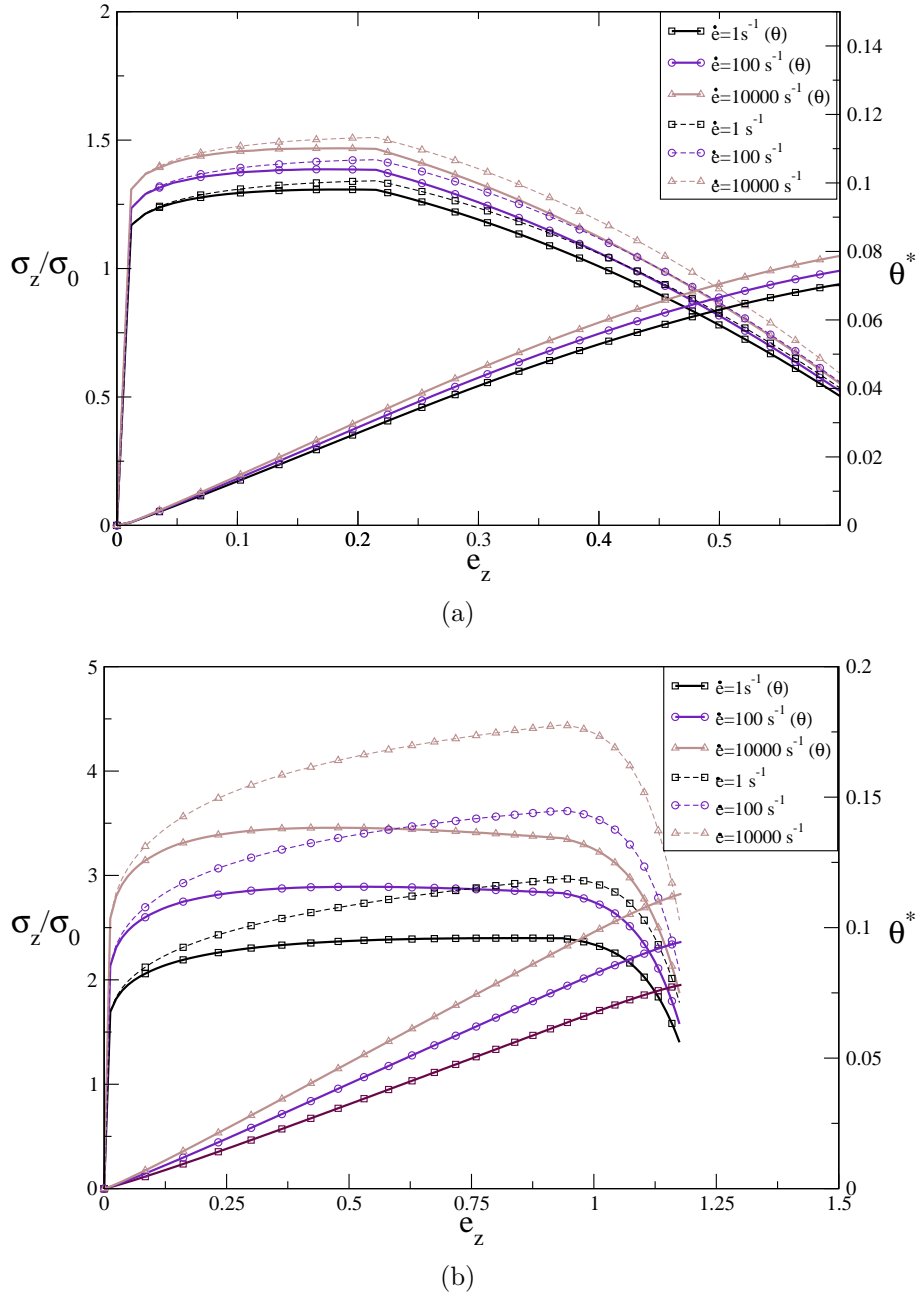


Figura 3.5: Tensión axial en función de deformación uniaxial para tensión uniaxial (a) Material A. (b) Material B. Los casos en los que se tienen en cuenta los efectos térmicos están marcados con θ .

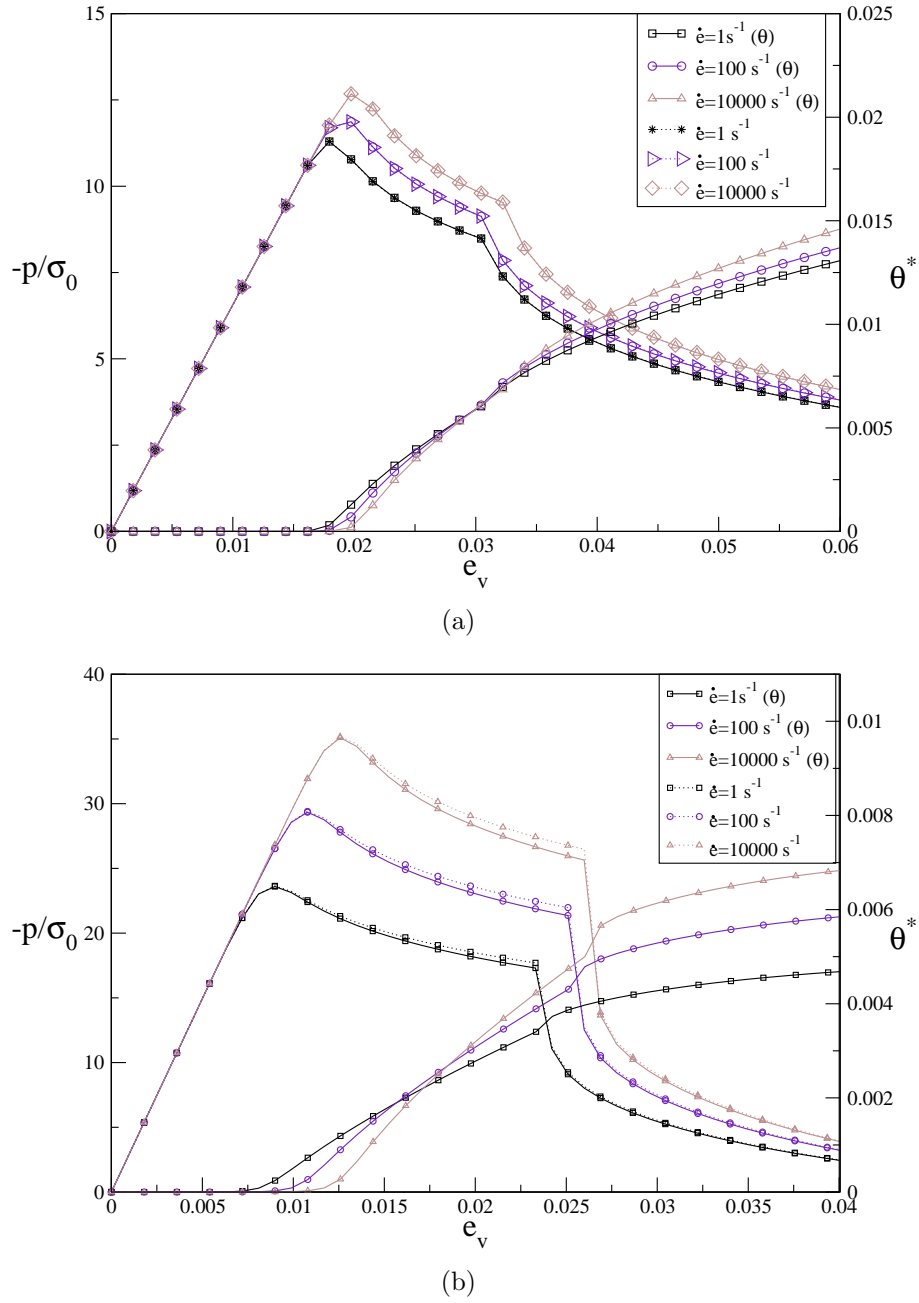
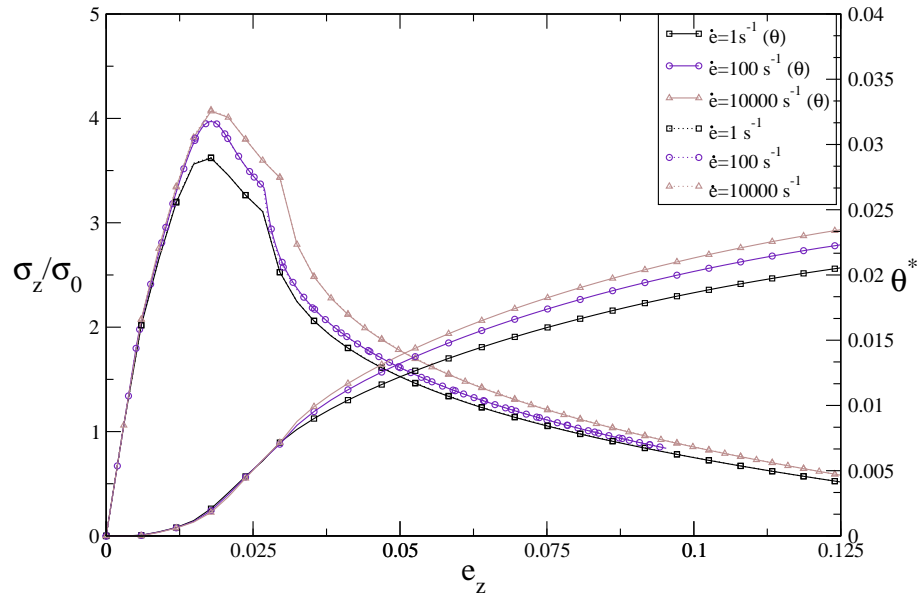
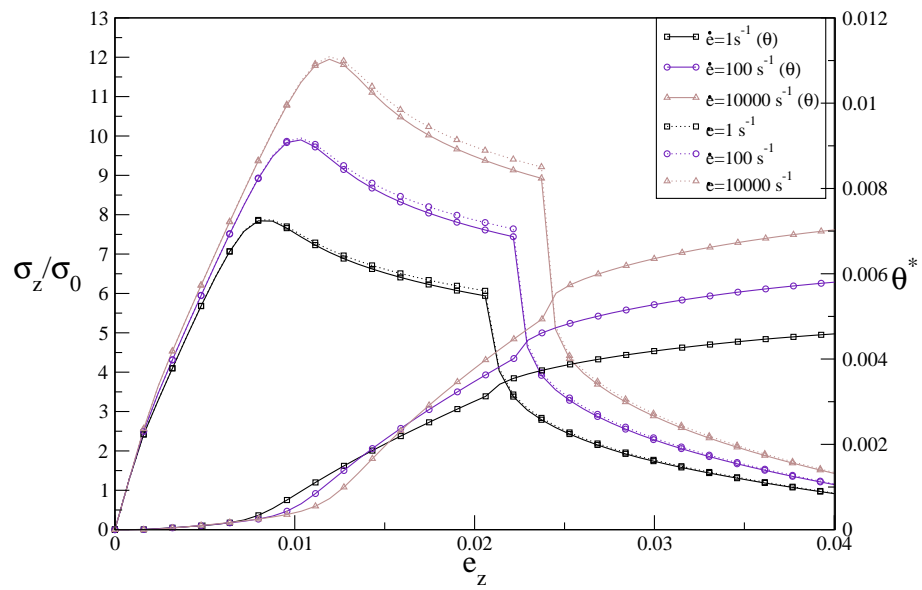


Figura 3.6: Presión en función de deformación volumétrica para expansión volumétrica
(a) Material A. (b) Material B



(a)

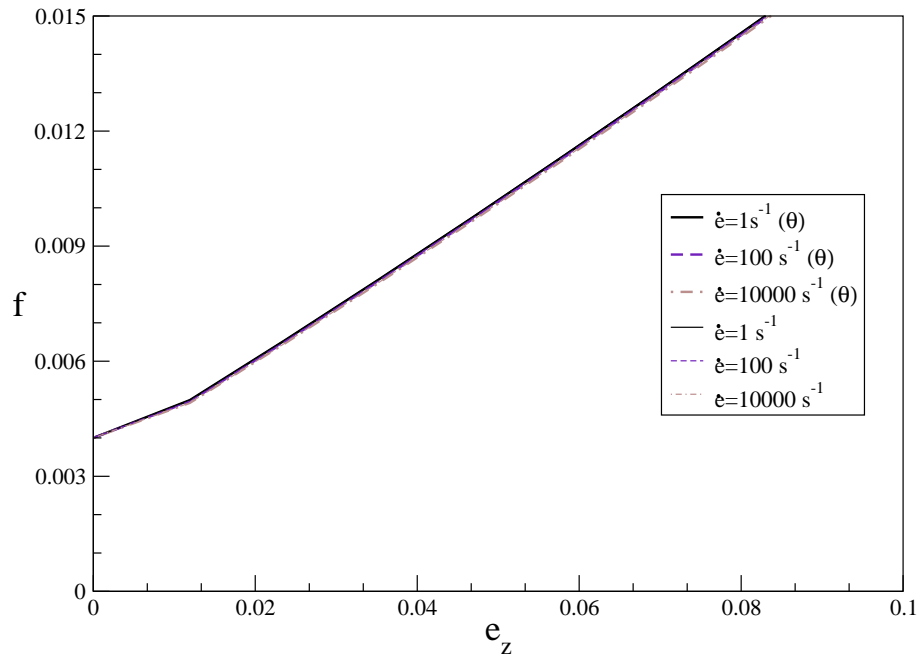


(b)

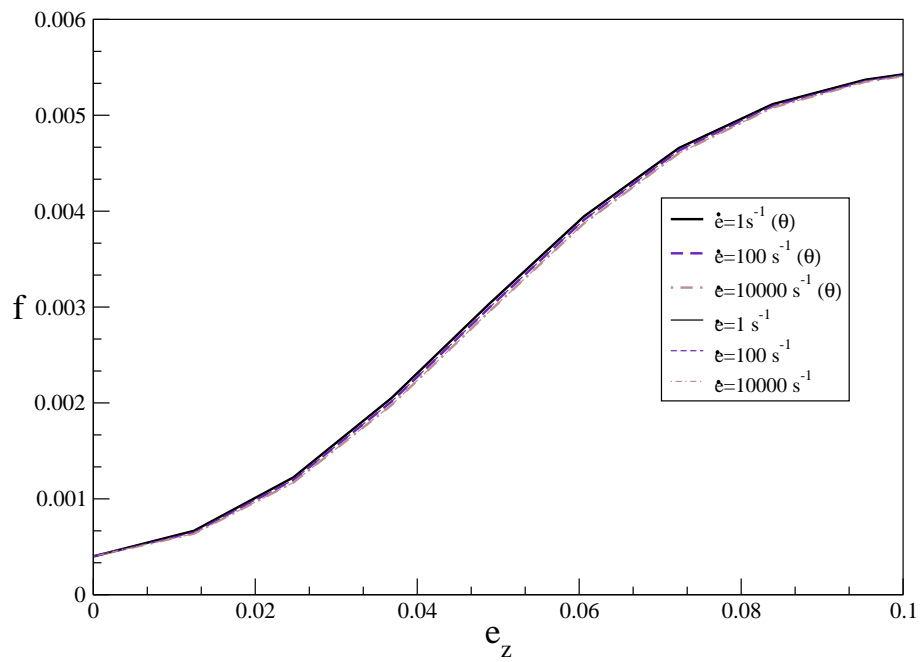
Figura 3.7: Tensión axial en función de deformación axial para tensión uniaxial restringida
 (a) Material A (b) Material B

Para el primer caso de carga, la variación de la porosidad con la deformación para los dos materiales estudiados se representa en la figura 3.8. Se observa cómo la evolución de la porosidad no se ve afectada prácticamente ni por la velocidad de deformación ni por la temperatura.

La misma información para el caso de expansión volumétrica y tensión uniaxial restringida se muestra, respectivamente, en las figuras 3.9 y 3.10. Estas curvas son diferentes a las del estado uniaxial debido a las altas triaxialidades que aquí se alcanzan. En estas curvas, el efecto de la temperatura es despreciable y el efecto de la variación con la velocidad de deformación es análogo al encontrado por Betegón et al. [43].

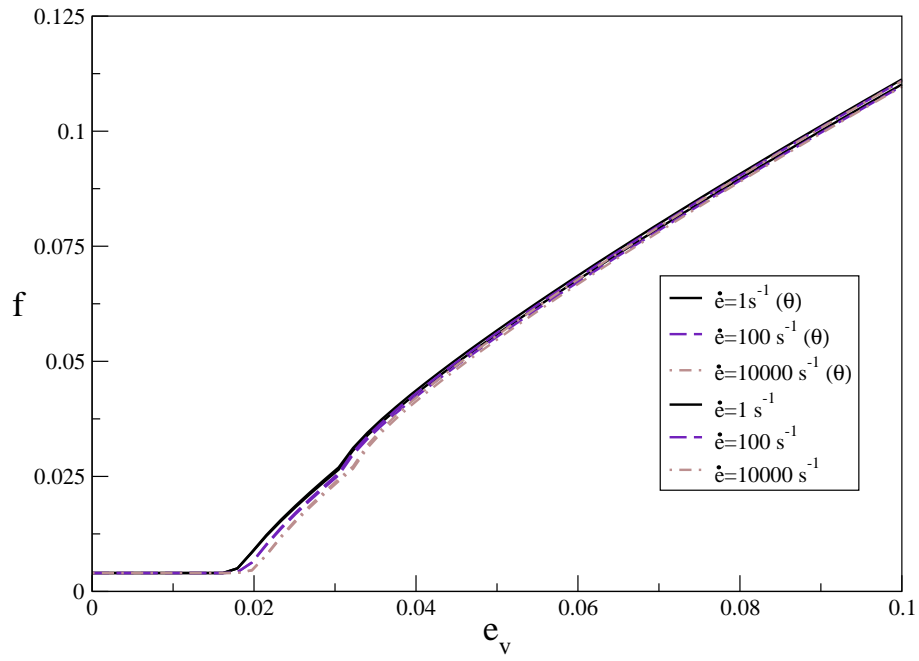


(a)

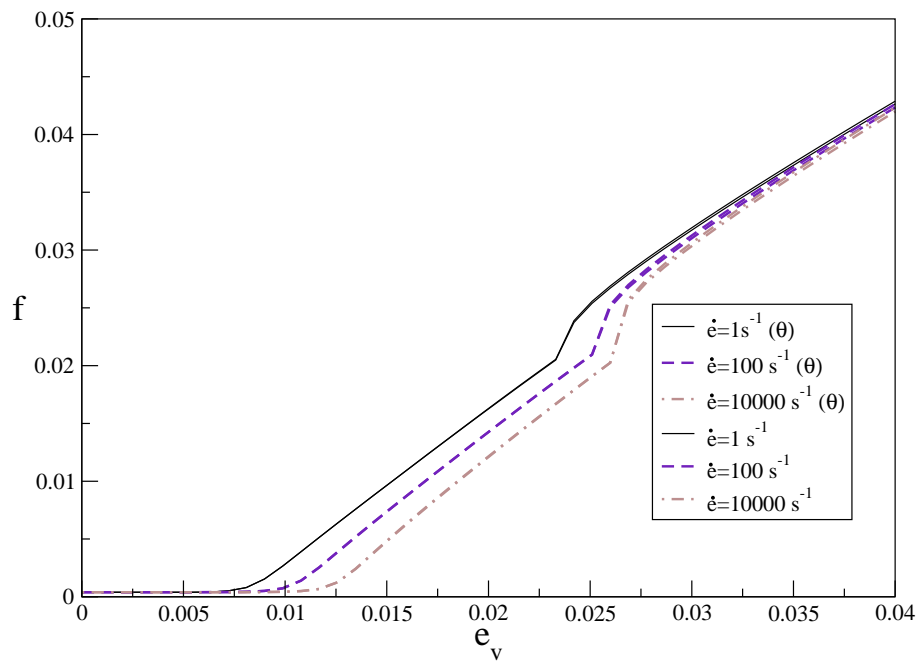


(b)

Figura 3.8: Porosidad en función de deformación axial para tensión uniaxial. a) Material A. b) Material B.

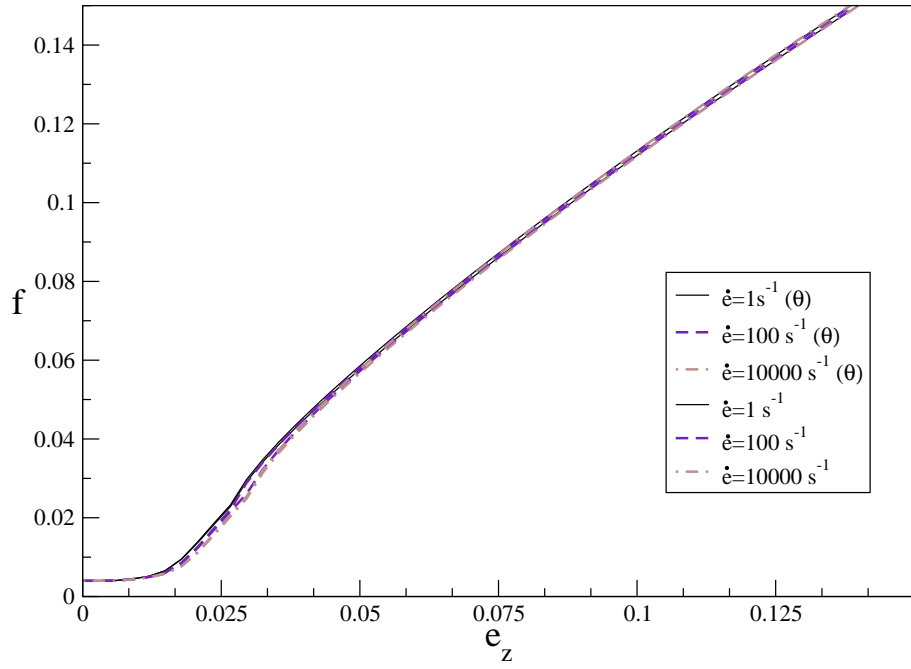


(a)

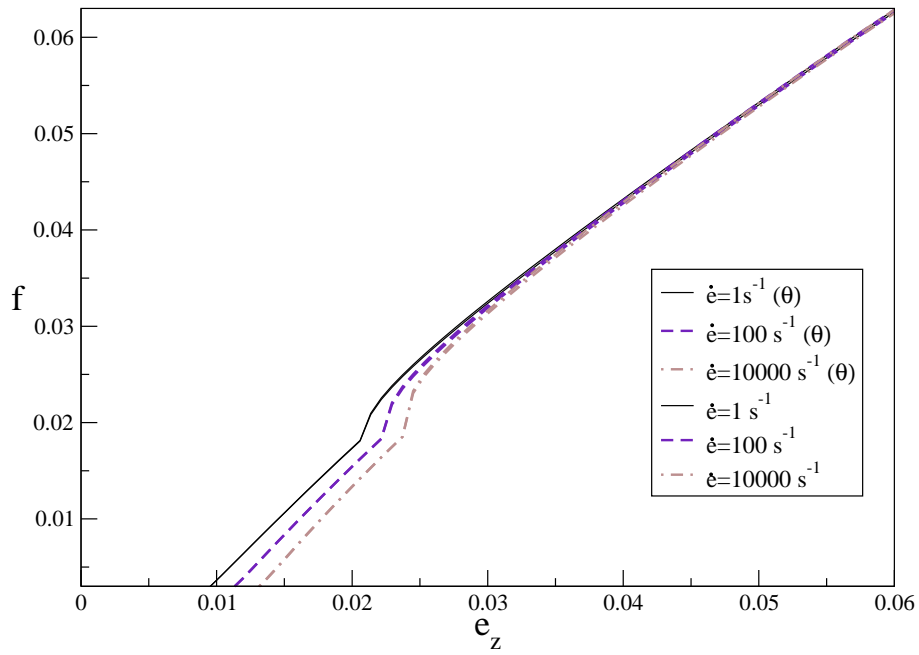


(b)

Figura 3.9: Porosidad en función de deformación volumétrica para expansión volumétrica
a) Material A. b) Material B.



(a)



(b)

Figura 3.10: Porosidad en función de deformación axial para deformación uniaxial restringida a) Material A. b) Material B.

3.7. Comparación con resultados experimentales

Con el algoritmo desarrollado en secciones anteriores se han simulado diferentes ensayos de impacto sobre cilindros de Taylor cuyos datos se han encontrado en la literatura científica [92].

El ensayo de impacto sobre el cilindro de Taylor es un ensayo que consiste en lanzar un cilindro de sección circular contra una pared rígida a una cierta velocidad inicial. El diámetro y la longitud inicial de las probetas analizadas son de 7.595 y 56.96 mm respectivamente. El material de los cilindros es Cobre OFHC. La ley de endurecimiento de este material sigue una ecuación de tipo Jonson-Cook, de la forma:

- Para el caso de $\dot{\varepsilon}^p < \dot{\varepsilon}_0$:

$$\bar{\sigma} = (K_1 + K_2 (\bar{\varepsilon}^p)^n) (1 - (\theta^*)^m) \quad (3.125)$$

- Para el caso de $\dot{\varepsilon}^p \geq \dot{\varepsilon}_0$:

$$\bar{\sigma} = (K_1 + K_2 (\bar{\varepsilon}^p)^n) \left(1 + K_3 \log \left(\frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) (1 - (\theta^*)^m) \quad (3.126)$$

con $\theta^* = (\theta - \theta_0)/(\theta_m - \theta_0)$ y θ_m y θ_0 la temperatura de fusión y la de referencia respectivamente. Las constantes del material se muestran en la tabla 3.3.

E MPa	ν	ρ_0 kg/m^3	K_1 MPa	K_2 MPa	n	K_3
124	0,34	8960	90	292	0,31	0,025
$\dot{\varepsilon}_0$ s^{-1}	m	T_0 K	T_m K	χ	C_p $m^2/s^2/K$	α K^{-1}
1	1,09	298	1331	0,9	383	$1,7 \times 10^{-5}$
q_1	q_2	f_0	f_N	s_N	ε_n	f_F
1,5	1,0	0,001	0,1	0,3	0,1	0,025

Tabla 3.3: Propiedades del Cobre OFHC

Las probetas analizadas presentan tres velocidades iniciales distintas: 153, 156 y 180 m/s.

Por la simetría del problema se puede realizar un análisis bidimensional axisimétrico de los casos, y se ha empleado una malla con un total de 3500 elementos de tipo CAX4R,

y de tamaño similar a la elegida por otros autores [39]. Un detalle del mallado utilizado se muestra en la figura 3.11.

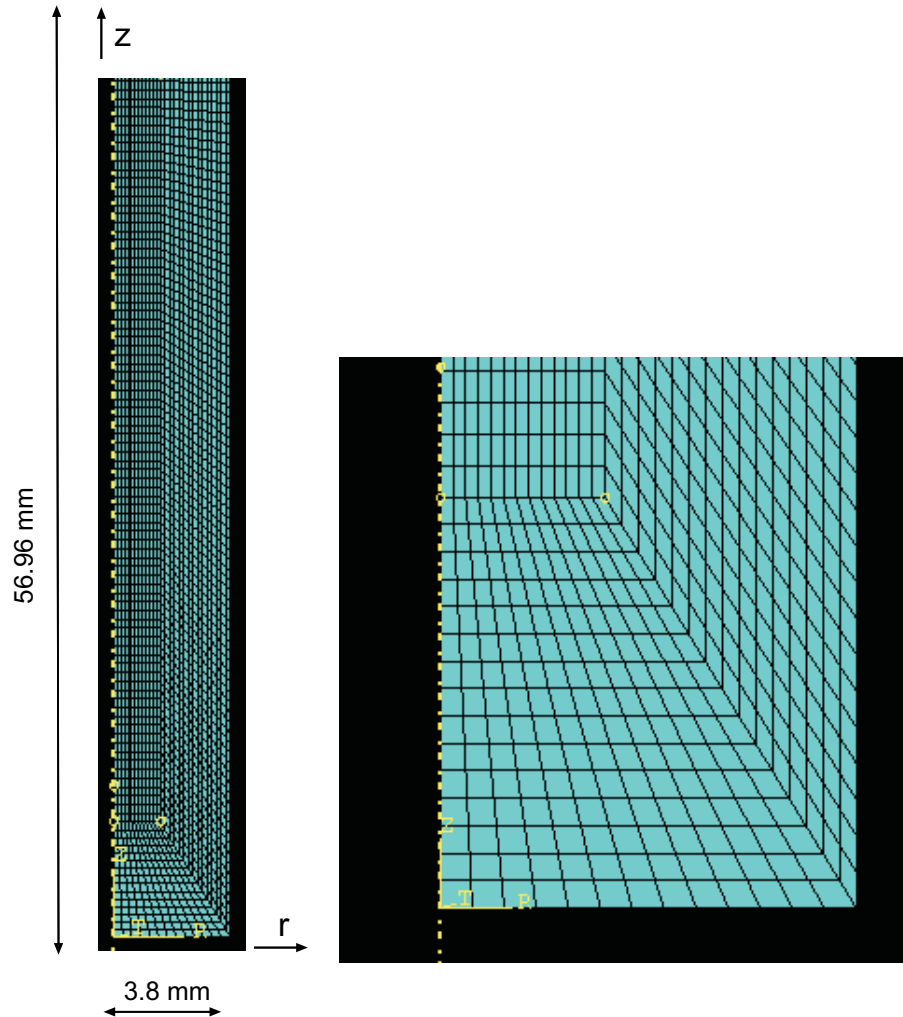


Figura 3.11: Detalle de la malla utilizada. La zona de impacto se encuentra situada en $z=0$

La figura 3.12 muestra una sección longitudinal del cilindro donde se dibuja la tensión de Von Mises a diferentes instantes del proceso de impacto.

Para cada impacto de Taylor, se han comparado los resultados de diámetro final y longitud final de la probeta con los resultados experimentales obtenidos por House [92], y se muestran en la figuras 3.13 y 3.14. Se observa cómo los resultados numéricos sobreestiman en las tres velocidades analizadas el diámetro final y subestiman la longitud final de la probeta. Sin embargo, en todos los casos los errores son inferiores al 10 % .

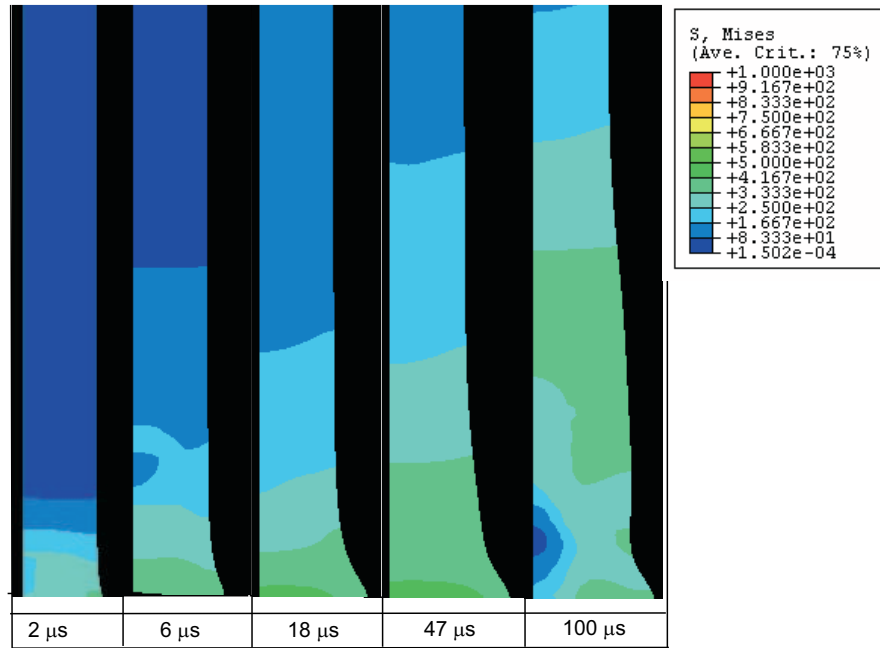


Figura 3.12: Tensión de Von Mises a diferentes instantes del proceso de impacto

Tras comparar las predicciones de variación de diámetro/longitud con las experimentales, se ha analizado la evolución de la tensión hidrostática, de la porosidad y de la temperatura en el caso de velocidad de impacto de 153 m/s en tres elementos localizados sobre el eje de simetría del cilindro y situados en la superficie de impacto a 2 mm y a 4 mm de distancia de dicha superficie de impacto.

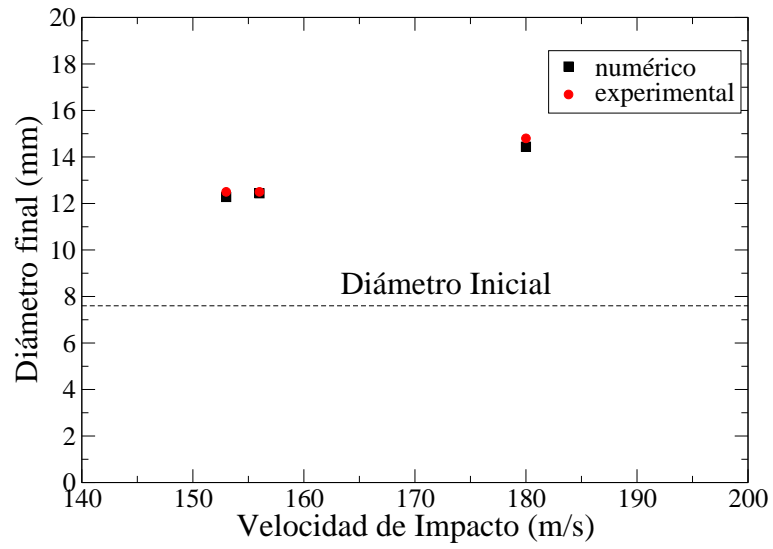


Figura 3.13: Diámetros finales del cilindro de Taylor a distintas velocidades de impacto

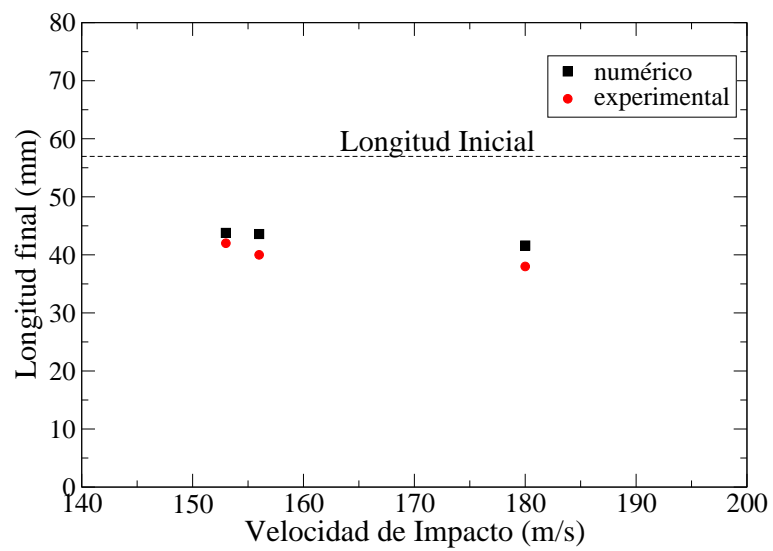


Figura 3.14: Longitudes finales del cilindro de Taylor a distintas velocidades de impacto

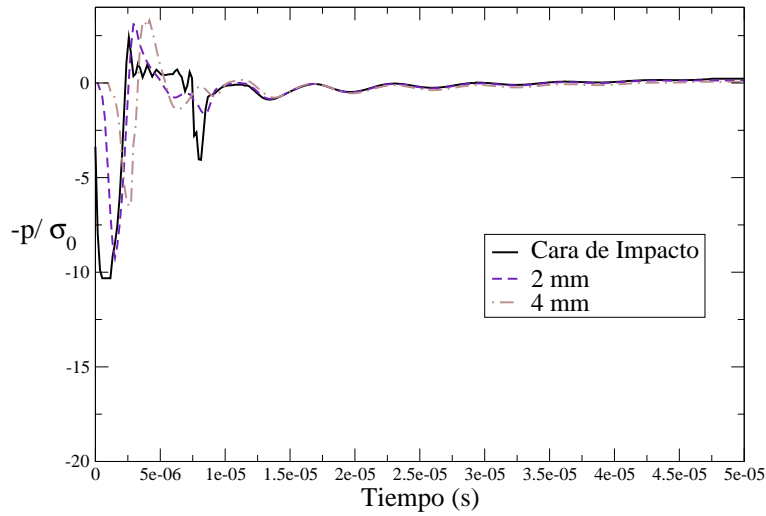


Figura 3.15: Variación de $-p/\sigma_0$ en función del tiempo para tres elementos situados sobre el eje axial del cilindro

La figura 3.15 muestra la evolución de la tensión hidrostática $-p$, adimensionalizada con el límite elástico σ_0 en los tres elementos antes mencionados. Desde el comienzo del ensayo hasta los $1.5 \mu s$, la tensión en la superficie de impacto es de compresión alcanzando valores mínimos de $-p/\sigma_0 = -10,5$. La propagación de la onda de compresión genera un rápido aumento de tensiones positivas, tanto en el elemento situado en la superficie de impacto como en el resto de elementos analizados alcanzando valores máximos de $-p/\sigma_0 = 2,5$. Resultados similares fueron encontrados por Worswick y Pick [39]

La evolución de la temperatura y la porosidad durante el ensayo se muestra en la figuras 3.16 y 3.17. En dichas figuras se observa cómo el valor máximo de $\theta^* = (\theta - \theta_0)/(\theta_m - \theta_0) = 0,145$ se alcanza en el elemento situado sobre la superficie de impacto a los $40 \mu s$ del comienzo del impacto y el valor máximo de f se alcanza en el elemento situado a 2 mm, con un valor de 0,0148 a los $8 \mu s$. Durante los periodos de expansión ($-p > 0$) se produce un aumento brusco de porosidad, y durante los periodos de compresión una disminución. En el elemento situado en la cara de impacto la porosidad es prácticamente nula. Resultados similares fueron encontrados por [39].

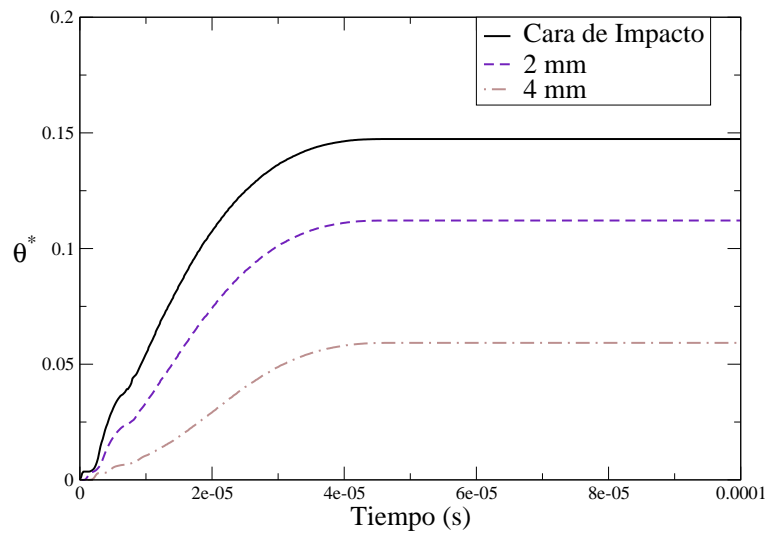


Figura 3.16: Variación de la temperatura con el tiempo para tres elementos situados sobre el eje axial del cilindro

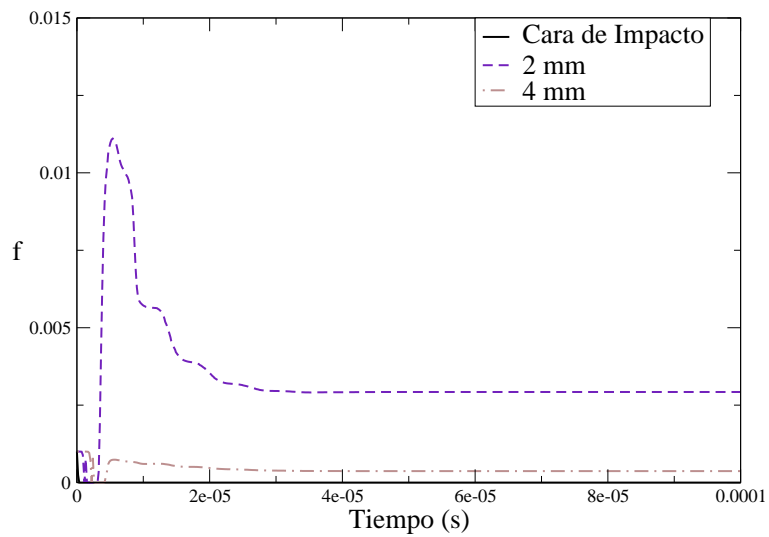


Figura 3.17: Variación de la porosidad con el tiempo para tres elementos situados sobre el eje axial del cilindro

Capítulo 4

MODELO DE GURSON CON PARÁMETROS DEPENDIENTES DE LA TRIAXIALIDAD

4.1. Planteamiento del problema

El modelo de Gurson original, sin parámetros de ajuste, se deriva de una solución aproximada del comportamiento de un sólido de material rígido perfectamente plástico con un hueco esférico en su interior. Posteriormente, Tvergaard ([93], [27]) introdujo valores de ajuste q_1 y q_2 al modelo de Gurson para mejorar la predicción del modelo para un material elasto-plástico con endurecimiento por deformación. Koplik y Needleman [94] realizaron estudios micromecánicos en materiales con endurecimiento por deformación y propusieron $q_1 = 1,25$ y $q_2 = 1,0$ como valores óptimos de los parámetros del modelo de Gurson modificado. Tanto los valores anteriormente citados, ($q_1 = 1,25$ y $q_2 = 1,0$) como los valores de $q_1 = 1,5$ y $q_2 = 1,0$ han sido ampliamente utilizados en la literatura. Otros investigadores han sugerido, sin embargo, el empleo de otros valores como óptimos para estos parámetros [95]. En todos los casos, q_1 y q_2 se toman como constantes independientes del material. No obstante, Faleskog et al. [33] y Gao et al. [96] han demostrado la influencia del coeficiente de endurecimiento por deformación en los parámetros q_1 y q_2 . Se ha observado además, cómo valores de q_1 y q_2 constantes no reproducen bien el comportamiento del material debido a la existencia de una dependencia de dichos parámetros con el estado tensional y con el valor de la porosidad inicial. En los estudios de Kim et al. [35], y utilizando modelos de celda con y sin hueco, se han analizado los efectos de la triaxialidad y de la porosidad inicial en las curvas tensión-deformación macroscópica y en

el crecimiento del daño demostrando los resultados obtenidos grandes dependencias entre los parámetros óptimos del modelo GTN y el estado tensional y f_0 del material.

En este capítulo se formula una modificación del modelo de Gurson en el que se incorporan la variación de los parámetros q_1 y q_2 con la triaxialidad y la porosidad inicial y se aplica específicamente para la variación analizada por Kim et al. [35]

4.2. Variación de los parámetros de Gurson con la triaxialidad y la porosidad inicial

Recientemente, Kim et al.[35] han realizado un estudio que ha puesto claramente de manifiesto la influencia de la triaxialidad del campo tensional y de la porosidad inicial en los valores de los parámetros q_1 y q_2 .

Esencialmente, el estudio consiste en comparar el comportamiento de una celda unitaria axisimétrica compuesta por una matriz elastoplástica de Von Mises con un único hueco esférico en su centro con una celda sin hueco que obedece al modelo GTN y con una porosidad inicial, f_0 , idéntica a la del modelo de celda con hueco. Ambas celdas están sometidas a unas condiciones de contorno tales que, en cada análisis, se mantiene constante la triaxialidad

En la figura 4.1 ([35]) se representa la variación de la tensión equivalente macroscópica (adimensionalizada con el límite elástico inicial σ_0), en función de la deformación equivalente macroscópica, tanto para la celda de Von Mises con hueco como para las celdas de Gurson con diferentes valores de los parámetros q_1 y q_2 . Como se puede apreciar, la respuesta es muy sensible a los parámetros elegidos, en concreto, la curva tensión-deformación alcanza tanto valores máximos de Σ_e diferentes a distintos valores de q_1 y q_2 , como distintos valores de deformación macroscópica equivalente (E_e) en los que se alcanza el valor máximo de tensión macroscópica equivalente (Σ_e). para cada caso.

Para obtener los valores óptimos de los parámetros del modelo de Gurson que mejor ajustan los resultados de las celdas con hueco, Kim et al. [35] tratan de minimizar las diferencias que se producen entre (ver figura 4.2):

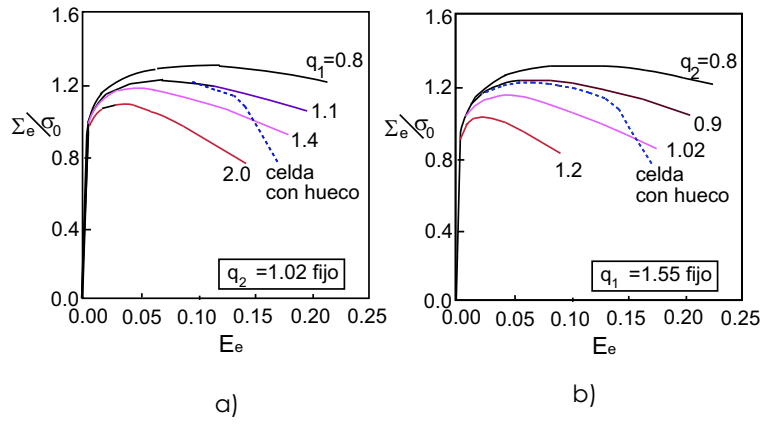


Figura 4.1: Influencia de q_1 y q_2 en el modelo de Gurson para $f_0 = 0,0071$ y $T = 2,0$

- los valores de tensión máxima alcanzada en ambos modelos
- las deformaciones a las que se producen las máximas tensiones
- el área bajo las curvas de variación de porosidad con deformación equivalente

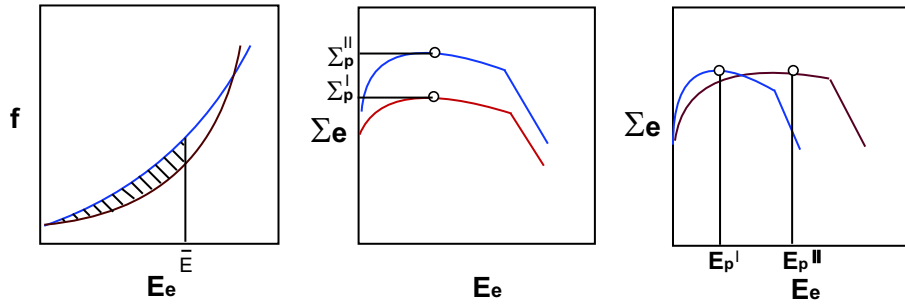


Figura 4.2: Esquema de los criterios de selección de los parámetros q_1 y q_2 óptimos

La ley del material utilizado en su análisis responde a la siguiente relación tensión-deformación verdadera:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} & \text{si } \sigma \leq \sigma_0 \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_0}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n & \text{si } \sigma > \sigma_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

con los parámetros $E = 200$ GPa, $\sigma_0 = 400$ MPa, $\nu = 0,3$ y $n = 10$.

Tras el proceso de calibración en el material analizado, se obtienen las siguientes curvas (figura 4.3) que reflejan los valores óptimos de q_1 y q_2 en función de la triaxialidad para distintas porosidades iniciales

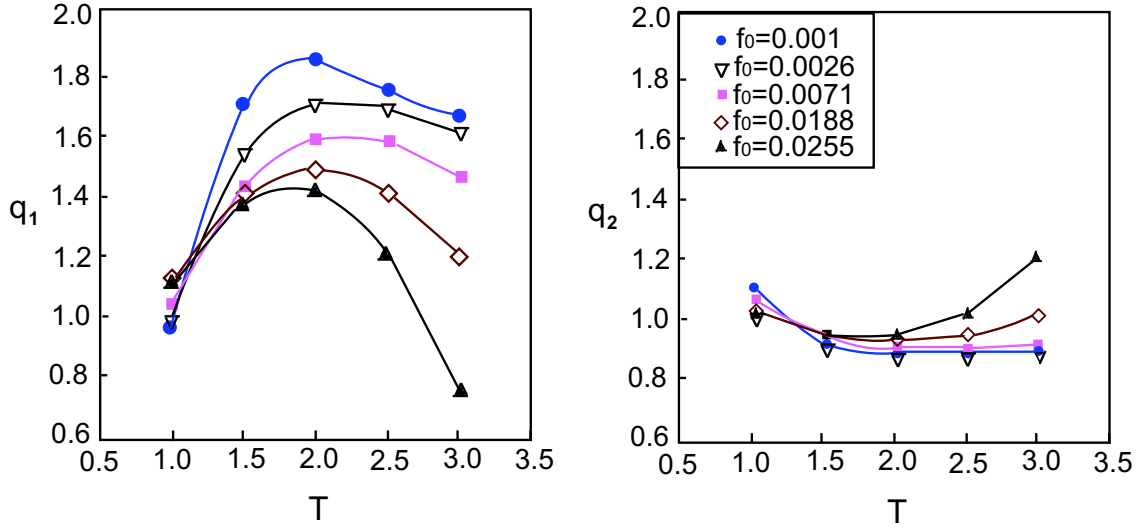


Figura 4.3: Valores de q_1 y q_2 en función de la triaxialidad y de la porosidad inicial

En ellas se pone de manifiesto que los parámetros no son constantes, sino que dependen de la triaxialidad y de la porosidad inicial.

4.3. Modelo con parámetros variables

Para abordar la integración de las ecuaciones del modelo GTN considerando parámetros variables, se ha utilizado el esquema desarrollado en el capítulo 3 para condiciones estáticas modificado para incluir la dependencia de los parámetros q_1 y q_2 con la triaxialidad.

En un problema con triaxialidad variable, los parámetros q_1 y q_2 no se mantienen constantes sino que son función de la triaxialidad T y la porosidad inicial f_0 :

$$q_1 = q_1(T, f_0) \quad q_2 = q_2(T, f_0) \quad (4.2)$$

Por tanto, la función de plastificación del modelo GTN, Φ , debe considerarse dependiente de q_1 y q_2 . Así, para un valor dado de f_0 , la diferencial de $\Phi(q, p, \bar{\sigma}, f^*, q_1, q_2)$ tiene ahora la expresión:

$$\begin{aligned} \delta\Phi(q, p, \bar{\sigma}, f^*, q_1, q_2) = & \frac{\partial\Phi}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\Phi}{\partial p}\delta p + \frac{\partial\Phi}{\partial \bar{\sigma}}\delta \bar{\sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial f^*}\delta f^* + \\ & + \frac{\partial\Phi}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial p}\delta p \right) + \frac{\partial\Phi}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial p}\delta p \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

con:

$$T = -\frac{p}{q} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{1}{q} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{p}{q^2} \quad (4.6)$$

A continuación, se indican las modificaciones a que da lugar esta consideración en el proceso de integración de las ecuaciones constitutivas y la constitución del Jacobiano:

- Sufren modificación:
 - $B_{10}^{(s)}$, $A_{11}^{(s)}$ y $A_{12}^{(s)}$ de la ecuación (3.98)
 - $B_{20}^{(s)}$, $A_{21}^{(s)}$ y $A_{22}^{(s)}$ de la ecuación (3.99)
 - A_{11} , A_{12} , B_{11} , B_{12} de la ecuación (3.112)
 - A_{21} , A_{22} , B_{21} y B_{22} de la ecuación (3.113)
- No cambian de expresión sin embargo:
 - $\delta H^{\alpha(s)}$ en la ecuación (3.97).
 - δH^{α} en la ecuación (3.111).

La obtención de las variables para este caso se muestra en el Anexo IV.

4.4. Validación del modelo con análisis basados en celdas unitarias

4.4.1. Formulación del problema

La simulación por elementos finitos de problemas de celdas unitarias con un hueco central que varía de volumen bajo estados de triaxialidad constante es un procedimiento numérico muy utilizado para el estudio de la evolución del daño dúctil de los materiales

Siguiendo los trabajos de Tvergaard [93] y Koplik y Needleman [94], el material se considera formado por un conjunto de celdas hexagonales unitarias periódicas y ensambladas entre si (figura 4.4). Cada celda unitaria contiene un hueco esférico en su interior procedente de una inclusión. Para simplificar el problema, se consideran celdas cilíndricas en vez de hexagonales, de dimensiones iniciales $2L_0$ y R_0 con un hueco en su interior de radio r_0 . Esta simplificación convierte el problema tridimensional en un problema bidimensional axisimétrico.

Se consideran dos configuraciones de celda:

- La primera, consiste en una celda de un material de Von Mises (plasticidad convencional J_2) que contiene en su centro un hueco esférico de tal manera que la fracción de volumen ocupada por el hueco, V_{hueco} , es tal que $(V_{hueco}/V_{celda}) = f_0$, donde V_{celda} es el volumen de la celda.
- La segunda es una celda sin hueco macroscópico constituida por un material que cumple las relaciones constitutivas del modelo GTN, con una fracción volumétrica inicial f_0 idéntica al valor de la celda unitaria con hueco.

Las celdas unitarias siguen una distribución periódica (Tvergaard [93], Koplik y Needleman [94]) y por tanto, se debe garantizar que en todo momento las superficies deformadas por el proceso de carga permanezcan paralelas a las superficies en la configuración sin deformar.

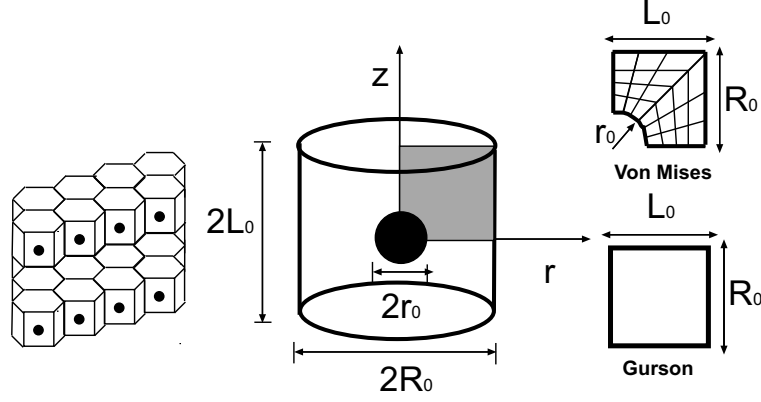


Figura 4.4: Transformación de la celda cilíndrica con un hueco central en un problema axisimétrico

Bajo estas condiciones, las deformaciones principales macroscópicas y la deformación efectiva puede expresarse como:

$$E_r = E_\theta = \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) \quad E_z = \ln \left(\frac{L}{L_0} \right) \quad E_e = \frac{2}{3} |E_z - E_r| \quad (4.7)$$

donde R y L son, respectivamente, el radio y la longitud de la celda deformada .

La tensión hidrostática macroscópica Σ_m , y la tensión efectiva macroscópica Σ_e se definen como:

$$\Sigma_m = \frac{1}{3} (\Sigma_z + 2\Sigma_r) \quad \Sigma_e = |\Sigma_z - \Sigma_r| \quad \Sigma_\theta = \Sigma_r \quad (4.8)$$

donde Σ_r , Σ_θ y Σ_z son respectivamente las tensiones verdaderas macroscópicas en coordenadas cilíndricas, según la dirección radial, circunferencial y vertical.

La triaxialidad del estado tensional para el caso de $\Sigma_z \geq \Sigma_r$, puede expresarse como:

$$T = \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} = \frac{1}{3} \left(\frac{1 + 2\rho}{1 - \rho} \right) \quad (4.9)$$

y para el caso de $\Sigma_z < \Sigma_r$ como:

$$T = \frac{1}{3} \left(\frac{1 + 2\rho}{\rho - 1} \right) \quad (4.10)$$

siendo ρ el cociente de las tensiones macroscópicas Σ_r y Σ_z :

$$\rho = \frac{\Sigma_r}{\Sigma_z} \quad (4.11)$$

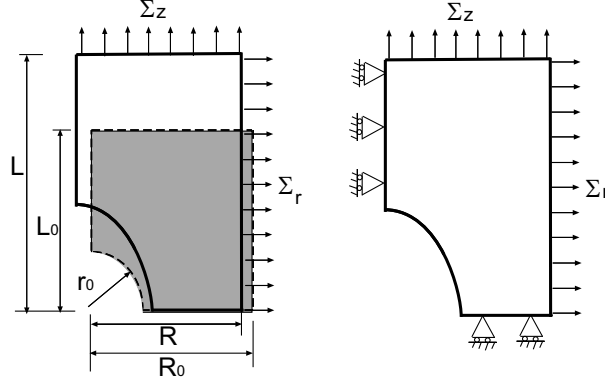


Figura 4.5: Condiciones de contorno de carga impuestas en la celda con hueco

Las condiciones de contorno de ambos modelos de celda se prescriben de tal forma que sea posible controlar la evolución de ρ (y por tanto la evolución de T) durante el proceso de carga y pueden ser de desplazamiento o de carga.

Por ejemplo, para una celda de dimensiones L y R en dirección r y z respectivamente, y con un hueco esférico en la celda con hueco de radio r , las condiciones de contorno en desplazamiento se formulan:

En el modelo de celda con hueco (figura 4.6):

$$\dot{u}_r(I) = 0, \quad \dot{\Sigma}_z(I) = \dot{\Sigma}_\Theta(I) = 0 \quad \text{en} \quad r = 0 \quad (4.12)$$

$$\dot{u}_r(I) = \dot{U}_r(I), \quad \dot{\Sigma}_z(I) = \dot{\Sigma}_\Theta(I) = 0 \quad \text{en} \quad r = R \quad (4.13)$$

$$\dot{u}_z(I) = \dot{U}_z(I), \quad \dot{\Sigma}_r(I) = \dot{\Sigma}_\Theta(I) = 0 \quad \text{en} \quad z = L \quad (4.14)$$

$$\dot{\Sigma}_r(I) = \dot{\Sigma}_z(I) = \dot{\Sigma}_\Theta(I) = 0, \quad \text{en} \quad (r)^2 + (z)^2 = r^2 \quad (4.15)$$

En el modelo de celda sin hueco, las condiciones de contorno son (figura 4.6):

$$\dot{u}_r(II) = 0, \quad \dot{\Sigma}_z(II) = \dot{\Sigma}_\Theta(II) = 0 \quad \text{en} \quad r = 0 \quad (4.16)$$

$$\dot{u}_r(II) = \dot{U}_r(II), \quad \dot{\Sigma}_z(II) = \dot{\Sigma}_\Theta(II) = 0 \quad \text{en} \quad r = R \quad (4.17)$$

$$\dot{u}_z(II) = \dot{U}_z(II), \quad \dot{\Sigma}_r(II) = \dot{\Sigma}_\Theta(II) = 0 \quad \text{en} \quad z = L \quad (4.18)$$

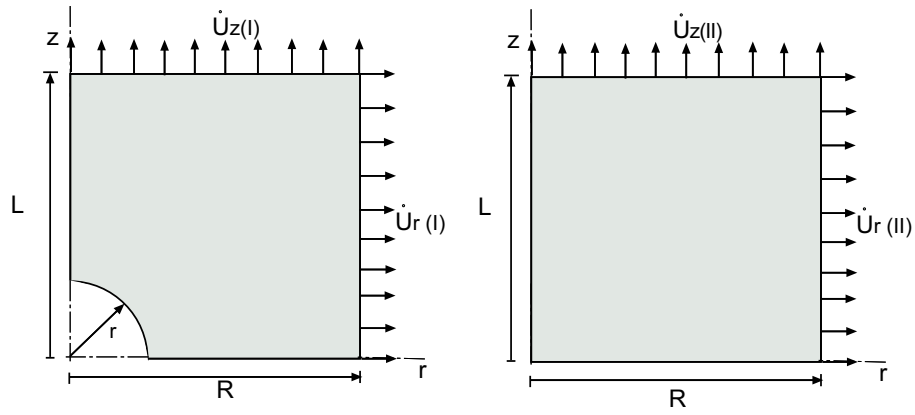


Figura 4.6: Condiciones de contorno de desplazamiento para las celdas con y sin hueco central

Para asegurar que ambos modelos de celda unitaria (con y sin hueco) son equivalentes, se impondrán condiciones de contorno que aseguren que ambas celdas son sometidas al mismo estado macroscópico de carga. Las superficies externas en todos los casos están sometidas a tensiones normales exclusivamente y además, para el caso de celda con hueco, la superficie del hueco está libre de tensiones. Ambos modelos son equivalentes si:

- (1) El valor de triaxialidad macroscópica es la misma en las celdas 1 y 2 (figura 4.7):

$$\frac{\Sigma_{r(celda1)}}{\Sigma_{z(celda1)}} = \frac{\Sigma_{r(celda2)}}{\Sigma_{z(celda2)}} = \rho \quad (4.19)$$

Si además se desea triaxialidad constante la ecuación anterior debe ser igual a un valor constante.

Para garantizar que ambos modelos son equivalentes es necesario imponer una condición más, que puede ser una de las siguientes: o bien asegurar el mismo desplazamiento

en r en ambas celdas, o bien el mismo desplazamiento en z o bien una combinación lineal de ambos (los valores de las constantes A y B son elegidos por el usuario pero deben ser los mismos en ambas configuraciones):

(2) Ambas configuraciones mantienen el mismo valor de desplazamiento (ó tensión) en r ó en z (o en una combinación lineal de ambas direcciones) durante el proceso de carga.

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{r(celda1)} &= \dot{E}_{r(celda2)} \\
 &\quad \text{ó} \\
 \dot{E}_{z(celda1)} &= \dot{E}_{z(celda2)} \\
 &\quad \text{ó} \\
 A\dot{E}_{r(celda1)} + B\dot{E}_{z(celda1)} &= A\dot{E}_{r(celda2)} + B\dot{E}_{z(celda2)}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

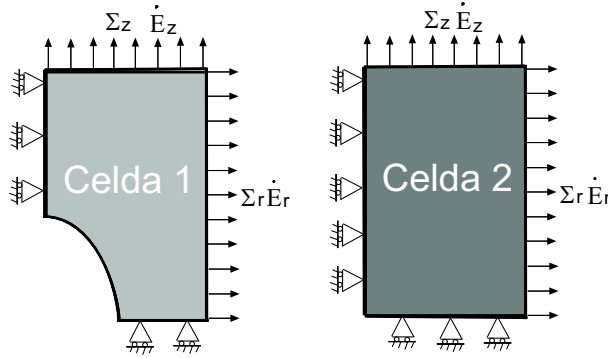


Figura 4.7: Modelo de celda de Von Mises con hueco y de Gurson sin hueco equivalente

4.4.2. Métodos de Implementación numérica para triaxialidad constante

Las condiciones de contorno que se debe imponer a las celdas unitarias para conseguir valores de triaxialidad macroscópica constante durante todo el proceso de carga, puede ser llevada a cabo por varios métodos. Tres de los más utilizados se recogen en el trabajo de Lin et.al [97] y se detallan a continuación :

Método I: Utilización de un elemento muelle

Esta forma de conseguir estados de triaxialidad constante ya fue utilizada por Brocks et al.[95] y Muhlich y Brocks [98], en celdas axisimétricas sometidas a estados de carga monótonos o cíclicos, y se basa en la utilización de un elemento elástico y un elemento muelle en uno de los nodos de la celda (ver figura 4.8).

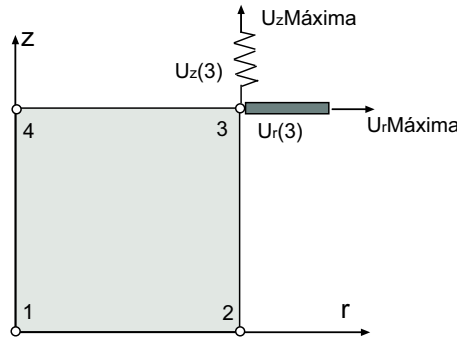


Figura 4.8: Condiciones de contorno: Utilización de elementos elásticos y muelle

El método consiste en prescribir el desplazamiento vertical, U_z^{max} , del nodo muelle y el desplazamiento horizontal U_r^{max} del nodo elástico, y cargar la celda hasta que los elementos elástico y muelle alcanzan los desplazamientos $U_r^{(3)}$ y $U_z^{(3)}$ que dan lugar a la triaxialidad prescrita. Se asume que durante todo el proceso de carga las superficies formadas por los nodos 3 y 4 y los nodos 1 y 2 son siempre paralelas (figura 4.8). Lo mismo ocurre con las superficies formadas por los nodos 2-3 y 1-4, es decir, durante todo el proceso de carga se cumple que $U_r^{(3)} = U_r^{(2)}$ y $U_z^{(3)} = U_z^{(4)}$.

Para el caso del elemento muelle, la fuerza vertical F_z puede expresarse como:

$$F_z = C(U_z^{max} - U_z^{(3)}) \quad (4.21)$$

siendo C la rigidez del muelle. El valor de la tensión macroscópica Σ_z que actúa sobre la celda, tiene el valor:

$$\Sigma_z = \frac{F_z}{\pi R^2} = \frac{F_z}{\pi(R_0 + U_r^{(3)})^2} \quad (4.22)$$

siendo, respectivamente, R_0 y R los radios de la celda al inicio del proceso y en un estado de carga actual respectivamente.

Para el elemento elástico, la fuerza en dirección r puede expresarse como:

$$F_r = \frac{EA}{L}(U_r^{max} - U_r^{(3)}) \quad (4.23)$$

donde E , A y L son, respectivamente, el módulo elástico, la sección y la longitud inicial del elemento elástico. El valor de la tensión macroscópica Σ_r es:

$$\Sigma_r = \frac{F_r}{2\pi RH} = \frac{F_r}{2\pi(R_0 + U_r^{(3)})(H_0 + U_z^{(3)})} \quad (4.24)$$

con H_0 y H las longitudes de la celda inicial y en el momento actual. Por tanto, la relación entre las fuerzas F_r y F_z puede escribirse:

$$F_r = 2 \frac{\Sigma_r}{\Sigma_z} \frac{H_0 + U_z^{(3)}}{R_0 + U_r^{(3)}} F_z \quad (4.25)$$

y recordando que:

$$T = \frac{2\Sigma_r + \Sigma_z}{3|\Sigma_r - \Sigma_z|} \rightarrow \frac{\Sigma_r}{\Sigma_z} = f(T) \quad (4.26)$$

La rigidez del elemento elástico puede escribirse como:

$$c = \frac{EA}{L} = 2f(T)F_z \frac{H_0 + U_z^{(3)}}{(R_0 + U_r^{(3)})(U_r^{max} - U_r^{(3)})} \quad (4.27)$$

y en función de la rigidez del elemento muelle, como:

$$c = \frac{EA}{L} = 2f(T)C(U_z^{max} - U_z^{(3)}) \frac{H_0 + U_z^{(3)}}{(R_0 + U_r^{(3)})(U_r^{max} - U_r^{(3)})} \quad (4.28)$$

La rigidez del elemento elástico EA/L se puede implementar en ABAQUS/Standard [89] a través de la subrutina de usuario UEL.

En el problema descrito, existen únicamente dos grados de libertad desconocidos, $U_r^{(3)}$ y $U_z^{(3)}$, el resto de grados de libertad se fijan a partir de ellos. Las cargas externas se aplican para prescribir los desplazamientos U_z^{max} y U_r^{max} , y los desplazamientos en el nodo 3 se determinan resolviendo la ecuación de equilibrio 4.28. Debido a que las cargas en los elementos elástico y muelle dependen de los desplazamientos en el nodo 3, es necesario realizar una serie de iteraciones para llegar al estado de equilibrio.

Ventajas del método

- Las fuerzas y los desplazamientos utilizados para el cálculo de la triaxialidad corresponden siempre al estado de equilibrio actual, por lo que los resultados obtenidos son suficientemente precisos.

- Para realizar el control de triaxialidad se realiza un control de desplazamiento y no un control de carga, por lo que el método puede ser aplicado a materiales que sufren procesos de ablandamiento durante la carga.

Inconvenientes del método

- Son necesarias muchas iteraciones para encontrar el estado de equilibrio.
- La convergencia es muy sensible a la rigidez del elemento muelle.
- Es difícil controlar de forma precisa los desplazamientos del nodo 3 en la celda axisimétrica
- Es difícil tratar los saltos de triaxialidad de valores positivos a negativos en los casos en los que la celda se carga cíclicamente.

Método II: Control de desplazamiento

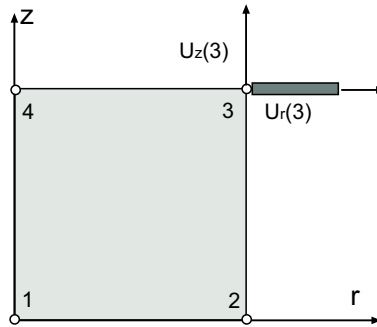


Figura 4.9: Condiciones de contorno para el método con control de desplazamiento

En este método se elimina el elemento muelle y el proceso de carga se controla directamente a partir del desplazamiento U_z del nodo 3. Durante todo el proceso, la superficie superior y la superficie cilíndrica permanecen perpendicular y paralela al eje Z respectivamente. Para obtener el valor de F_r (ecuación 4.25), es necesario conocer el valor fuerza F_z del nodo 3. Este valor sin embargo puede ser obtenido únicamente al final de la iteración tras resolver las ecuaciones del modelo, por lo que el método utiliza el valor de F_z del paso anterior F_z^{i-1} para el cálculo de las incógnitas del problema.

$$C = \frac{EA}{L} 2f(T) F_z^{i-1} \frac{H_0 + U_z^{(3)}}{(R_0 + U_r(3))(U_r^{max} - U_r^{(3)})} \quad (4.29)$$

Este método se puede implementar en ABAQUS/Standard [89] a través de las subrutinas de usuario URDFIL y DBFILE, que permiten leer las fuerzas de reacción de los resultados y utilizar estos valores en un paso para calcular los valores de F_r en el nuevo paso de integración. Esta estrategia es por tanto aproximada, y su precisión depende de lo próximos que estén los valores F_z y F_z^{i-1} y del tamaño de los pasos.

Ventajas

- Se puede conseguir un control preciso de desplazamiento U_z del nodo 3.
- Al realizarse un control de desplazamiento, esta técnica es aplicable a materiales con regímenes de ablandamiento.
- En esta técnica no se utiliza un elemento muelle, por lo que no existe dependencia de la convergencia con la rigidez elegida del elemento muelle como en el caso del método I.

Inconvenientes

- La estrategia numérica es aproximada, ya que se utiliza el valor de la fuerza F_z del paso anterior para obtener el valor de F_r del elemento elástico.
- Los problemas con los saltos de triaxialidad de valores positivos a negativos aumentan.

Método III: Control de fuerza

Las tensiones macroscópicas Σ_r y Σ_z se definen a través de las cargas introducidas de forma uniforme en la superficie superior y cilíndrica de la celda respectivamente. Las tracciones macroscópicas Σ_r y Σ_z cumplen la ecuación:

$$\Sigma_r = f(T)\Sigma_z \quad (4.30)$$

$$f(T) = \begin{cases} (1 + 3T)/(3T - 2) & \text{si } \Sigma_r \leq \Sigma_z \\ (3T - 1)/(3T + 2) & \text{si } \Sigma_r > \Sigma_z \end{cases}$$

Para definir la relación entre ambas tracciones macroscópicas, el programa ABAQUS/Standard [89] provee de la subrutina DLOAD.

Ventajas

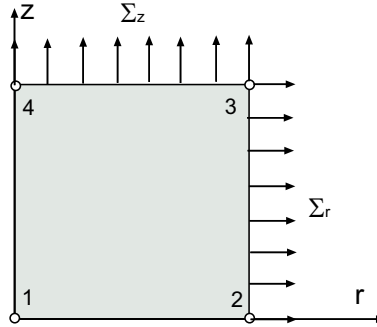


Figura 4.10: Condiciones de contorno por la celda con control de fuerza

- Se tiene un control preciso de Σ_r y Σ_z , por lo que cambios de triaxialidad de valores positivos a negativos no afectan a la computación.
- La estrategia numérica es precisa.

Inconvenientes

- Como la carga se controla por tracción, la técnica no puede ser aplicada en las regiones plásticas con bajo modulo de endurecimiento o en regímenes de ablandamiento del material.

Método IV: Utilización de nodos dummy: control de desplazamiento

Un método de control de triaxialidad controlada por desplazamiento fue desarrollado por Faleskog et al. [33], y se basa en los siguientes principios:

La variación de la energía del trabajo total de deformación puede expresarse, en una celda [99], como:

$$\dot{W} = V\Sigma_r\dot{E}_r + V\Sigma_\theta\dot{E}_\theta + V\Sigma_z\dot{E}_z \quad (4.31)$$

donde V es el volumen de la celda, Σ_r , Σ_θ , Σ_z las tensiones verdaderas macroscópicas y \dot{E}_r , \dot{E}_θ y \dot{E}_z las deformaciones macroscópicas. Para el caso axilsimétrico ($\dot{E}_\theta = \dot{E}_r$ y $\Sigma_\theta = \Sigma_r$), la ecuación anterior se simplifica resultando:

$$\dot{W} = 2V\Sigma_r\dot{E}_r + V\Sigma_z\dot{E}_z \quad (4.32)$$

Si se definen los valores de carga P_r y P_z (conjugados de \dot{E}_r y \dot{E}_z , respectivamente) como $P_r = 2V\Sigma_r$ y $P_z = V\Sigma_z$, la ecuación anterior se escribe como:

$$\dot{W} = P_r \dot{E}_r + P_z \dot{E}_z \quad (4.33)$$

A partir de la relación entre Σ_r y Σ_z expresada en 4.11 se obtiene:

$$\frac{\Sigma_r}{\Sigma_z} = \frac{\dot{\Sigma}_r}{\dot{\Sigma}_z} = \rho \quad (4.34)$$

y es fácil probar que:

$$\frac{P_r}{P_z} = 2 \frac{\Sigma_r}{\Sigma_z} = 2\rho \quad (4.35)$$

Transformación de coordenadas

Se define un vector \mathbf{n} ortonormal de transformación de coordenadas cuya expresión es:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{n}| = 1 \quad \mathbf{n}^{-1} = \mathbf{n}^T$$

con β_1 y β_2 de valor:

$$\beta_1 = \frac{2\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}} \quad \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+4\rho^2}} \quad (4.36)$$

que posibilita el cambio de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 \dot{E}_r - \beta_1 \dot{E}_z \\ \beta_1 \dot{E}_r + \beta_2 \dot{E}_z \end{pmatrix} = \mathbf{n}^T \begin{pmatrix} \dot{E}_r \\ \dot{E}_z \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{n}^T \begin{pmatrix} \dot{P}_r \\ \dot{P}_z \end{pmatrix} = \dot{P}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $\dot{P}_0 = \sqrt{1+4\rho^2} \dot{P}_z$.

En el sistema de coordenadas transformado, la variación de la energía de deformación total se puede escribir como:

$$\dot{W} = V\Sigma_z \dot{E}_z + 2V\Sigma_r \dot{E}_r = P_z \dot{E}_z + P_r \dot{E}_r = P_2 \dot{E}_2 \quad (4.37)$$

y las condiciones de contorno en el nuevo sistema de coordenadas, deben cumplir que:

$$1. \dot{P}_1 = 0$$

$$2. \dot{E}_2 = \dot{E}_0$$

donde \dot{E}_0 es una constante prescrita por el usuario.

En el sistema de coordenadas cilíndrico original, la prescripciones $\dot{P}_1 = 0$ y $\dot{E}_0 = \dot{E}_2$, equivalen a:

$$1. \dot{P}_1 = 0$$

$$\dot{P}_1 = \beta_2 \dot{P}_r - \beta_1 \dot{P}_z = 0 \rightarrow \dot{P}_r = \frac{\beta_1}{\beta_2} \dot{P}_z \rightarrow \frac{\dot{P}_r}{\dot{P}_z} = 2\rho \rightarrow \frac{\Sigma_r}{\Sigma_z} = \rho \quad (4.38)$$

equivalente a la ecuación 4.19.

$$2. \dot{E}_2 = \dot{E}_0$$

$$\dot{W} = P_z \dot{E}_z + P_r \dot{E}_r = P_2 \dot{E}_2 \rightarrow \beta_1 \dot{E}_r + \beta_2 \dot{E}_z = \dot{E}_0 = cte \quad (4.39)$$

equivalente a la ecuación 4.20 (c)

A partir de la definicion de deformación macroscópica \dot{E}_r y \dot{E}_z :

$$\dot{E}_r = \frac{\dot{R}}{R} \quad \dot{E}_z = \frac{\dot{L}}{L} \quad (4.40)$$

Se puede obtener para \dot{R} y \dot{L} las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R \left(\beta_2 \dot{E}_1 + \beta_1 \dot{E}_2 \right) \\ \dot{L} &= L \left(-\beta_1 \dot{E}_1 + \beta_2 \dot{E}_2 \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Para el caso concreto de ρ constante, la ecuación 4.39 puede integrarse para obtener:

$$\beta_1 \cdot \ln E_r + \beta_2 \cdot \ln E_z = cte \cdot t \quad (4.42)$$

4.4.3. Solución numérica para triaxialidad variable

En un problema con triaxialidad variable, el método desarrollado por Faleskog et al. [33] necesita un tratamiento especial, ya que la ecuación (4.39):

$$\beta_1 \dot{E}_r + \beta_2 \dot{E}_z = \dot{E}_0 = cte \quad (4.43)$$

no puede ser directamente integrada, y debe ser resuelta de forma incremental en cada paso de integración i .

$$\beta_1|_i \Delta E_r|_i + \beta_2|_i \Delta E_z|_i = cte \cdot (i - (i - 1)) \quad (4.44)$$

siendo $\Delta E_r|_i$ y $\Delta E_z|_i$ los incrementos de deformación en el paso (i) en dirección r y z respectivamente.

Así, para un nodo de coordenadas (R, L) en la celda unitaria (figura 4.6), los valores de $\Delta E_r|_i$ y $\Delta E_z|_i$ son:

$$\Delta E_r|_i = \frac{u_r(i) - u_r(i - 1)}{R_0 + u_r(i)} \quad (4.45)$$

$$\Delta E_z|_i = \frac{u_z(i) - u_z(i - 1)}{L_0 + u_z(i)} \quad (4.46)$$

- $u_r(i)$ y $u_r(i - 1)$ son los desplazamientos del nodo en dirección radial en los pasos de integración (i) e $(i - 1)$ respectivamente.
- $u_z(i)$ y $u_z(i - 1)$ son los desplazamientos del nodo en dirección axial en (i) e $(i - 1)$.
- L_0 y R_0 son las coordenadas iniciales del nodo en la celda axisimétrica en dirección axial y radial respectivamente.

4.4.4. Implementación en ABAQUS. Subrutina MPC

Las condiciones $\dot{P}_1 = 0$ y $\dot{E}_2 = \dot{E}_0$, se implementan en ABAQUS/Standard [89] en un elemento tipo CAX8R de la siguiente forma:

- Se impone el mismo desplazamiento longitudinal U_z a todos los nodos de la superficie superior de longitud L . Esto se realiza con la opción *EQUATION.
- Se impone el mismo desplazamiento radial, U_r , a todos los nodos de la superficie exterior de radio R . Para ello se usa de nuevo la opción *EQUATION.
- Se relaciona el movimiento del nodo 1 perteneciente a ambas superficies (ver figura 4.11) con un nodo auxiliar ('dummy') de tal forma que el segmento cuyos extremos son el nodo 1 y el nodo dummy cumplen las relaciones: $\dot{P}_1 = 0$ (tracción uniaxial

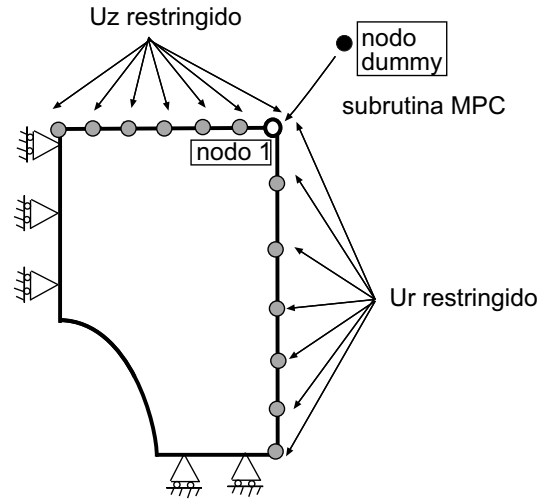


Figura 4.11: Condiciones de contorno utilizando un nodo dummy

en dirección 2) y $\dot{E}_2 = \dot{E}_0$. La implementación de las ecuaciones 4.38 y 4.44 para triaxialidad variable se realiza a través de una subrutina de usuario MPC. El diagrama de flujo que se sigue en la implementación de la subrutina MPC se muestra en la figura 4.12

4.4.5. Resultados numéricos

Los análisis numéricos sobre las celdas unitarias se han llevado a cabo con el método de integración desarrollado que se ha implementado en ABAQUS/Standard, a través de la subrutina de usuario UMAT. La triaxialidad se controla mediante la subrutina de usuario MPC. En todos los casos analizados las dimensiones iniciales de las celdas axisimétricas fueron $L_0 = R_0 = 1\text{mm}$, y considerando valores de porosidad inicial $f_0 = 0,001$ y $f_0 = 0,0071$. La malla en la celda con el modelo de Von Mises, está formada por un total de 1600 elementos isoparamétricos de integración reducida. De todos ellos, 40 elementos están situados alrededor de la cavidad y otros 40 elementos en dirección radial.

La primera parte del trabajo ha consistido en validar los resultados obtenidos por Kim et al. [35] para triaxialidad constante. La validación ha consistido en reproducir los resultados obtenidos por estos autores para un valor de triaxialidad $T = 2,0$ y $f_0 = 0,071$ con diferentes valores de q_1 y q_2 y que se muestran en la figura (4.1). Una vez realizada

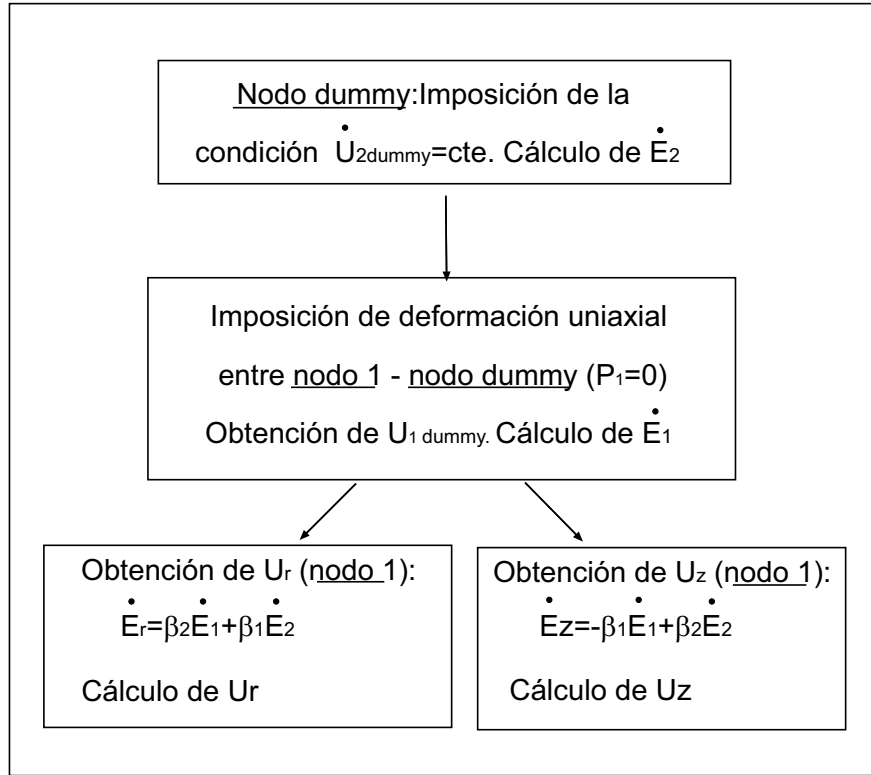


Figura 4.12: Diagrama de flujo de la subrutina MPC

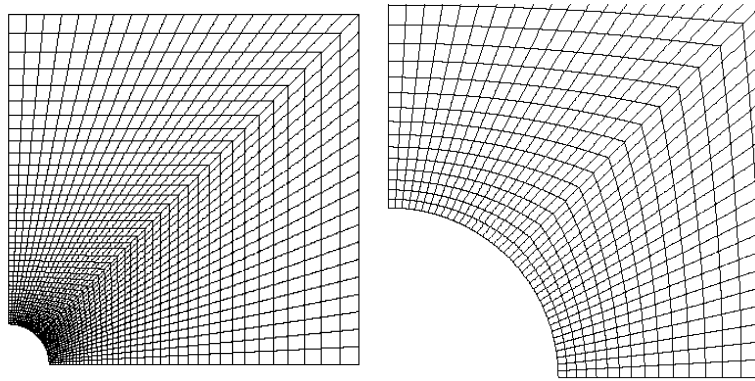


Figura 4.13: Malla y detalle de malla para el modelo de celda con hueco

esta validación, se ha planteado el análisis con parámetros con triaxialidad variable, antes de lo cual, para cada f_0 , los valores óptimos de los parámetros q_1 y q_2 aportados por Kim et al. [35] (figura 4.3) se han aproximado mediante un polinomio de tercer grado de la

forma:

$$q_1(f_0, T) = A_1 T^3 + B_1 T^2 + C_1 T + D_1 \quad (4.47)$$

$$q_2(f_0, T) = A_2 T^3 + B_2 T^2 + C_2 T + D_2$$

con esta aproximación, las derivadas $\partial q_1/\partial T$ y $\partial q_2/\partial T$ de la ecuación (4.3) tienen la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial T} &= 3A_1 T^2 + 2B_1 T + C_1 \\ \frac{\partial q_2}{\partial T} &= 3A_2 T^2 + 2B_2 T + C_2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

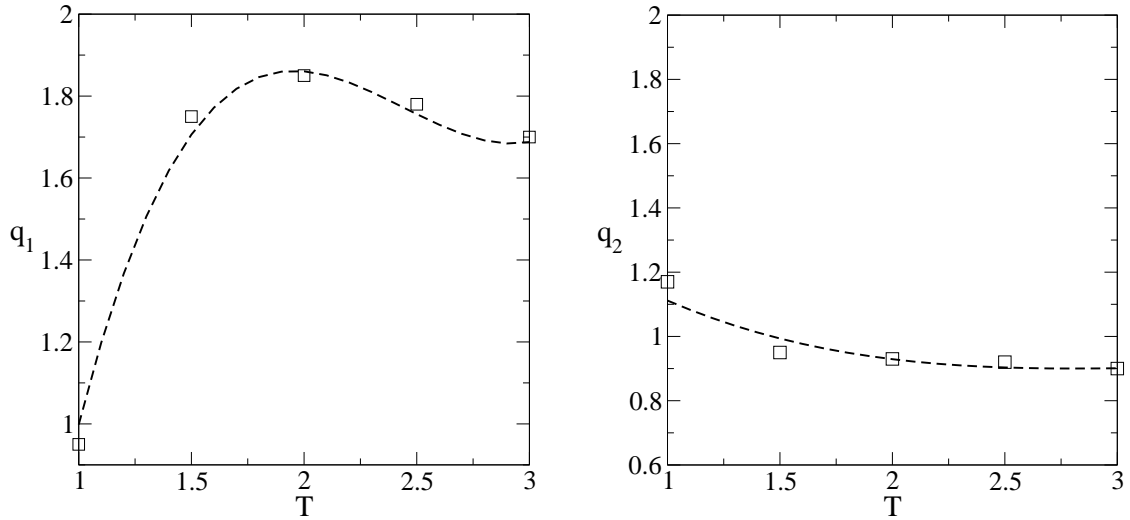


Figura 4.14: Ajuste de los parámetros con T para $f_0 = 0,001$

En las tablas 4.1 y 4.2 se muestran los valores de los coeficientes de ajuste correspondientes a las porosidades iniciales $f_0 = 0,001$ (tabla 4.1) y $f_0 = 0,0071$ (tabla 4.2).

Los casos de triaxialidad variable analizados han sido los siguientes:

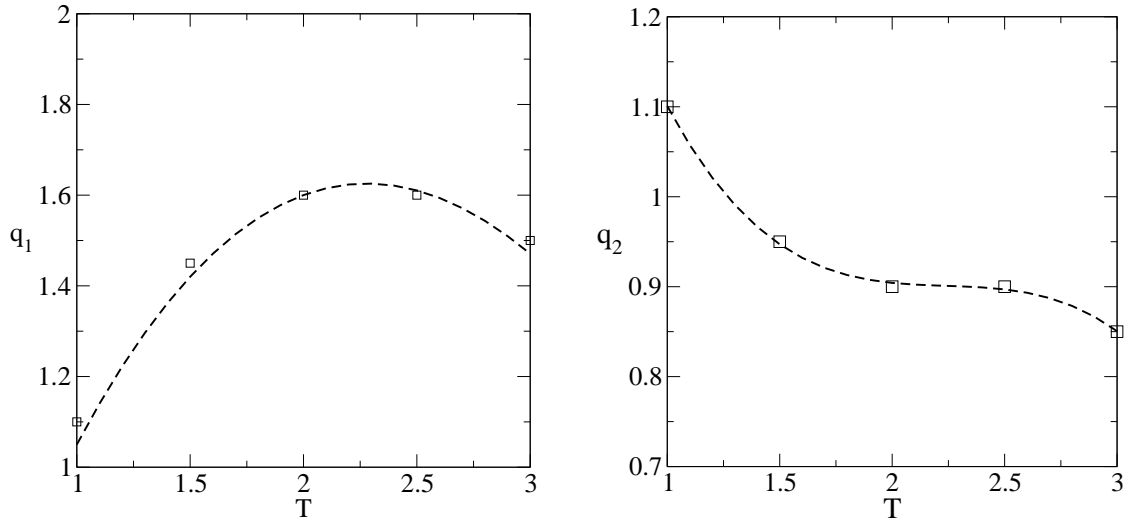


Figura 4.15: Ajuste de los parámetros con T para $f_0 = 0,0071$

	A₁	B₁	C₁	D₁		A₂	B₂	C₂	D₂
q_1	0,3933	-2,8771	6,7402	-3,258	q_2	-0,02	0,1971	-0,6336	1,568

Tabla 4.1: Coeficientes de ajuste para $f_0 = 0,001$

	A₁	B₁	C₁	D₁		A₂	B₂	C₂	D₂
q_1	0,0267	-0,5	1,8633	-0,34	q_2	-0,1	0,6714	-1,5107	2,04

Tabla 4.2: Coeficientes de ajuste para $f_0 = 0,0071$

Caso 1: Triaxialidad con variación cuadrática

La variación de la triaxialidad con la deformación equivalente para el primer caso analizado sigue la ecuación:

$$T = -8 * \left(\frac{E_e}{0,1} \right)^2 + 8 \left(\frac{E_e}{0,1} \right) + 1 \quad (4.49)$$

y aparece representada en la figura 4.16.

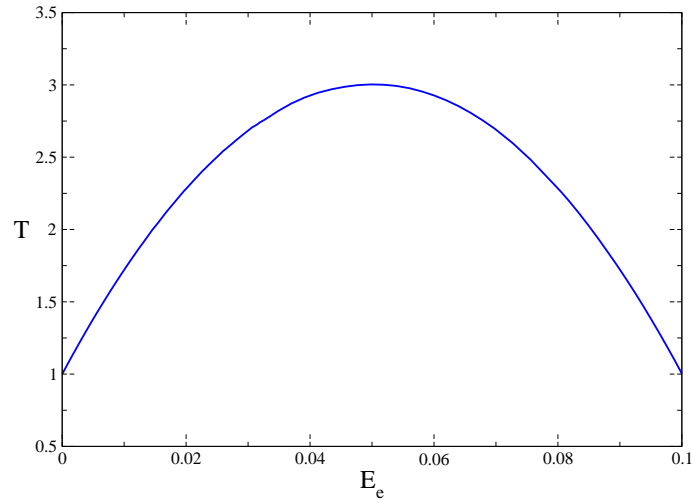


Figura 4.16: Variación cuadrática de la triaxialidad con la deformación equivalente.

En la figura 4.17 se muestra la variación de la tensión equivalente macroscópica adimensionalizada con porosidad $f_0 = 0,001$ para los siguientes análisis.

- Modelo de Von Mises con hueco
- Modelo de Gurson con parámetros variables.
- Modelo de Gurson con parámetros constantes de valores $q_1 = 1,5$ y $q_2 = 1,0$.
- Modelo de Gurson con parámetros constantes de valores $q_1 = 1,25$ y $q_2 = 1,0$.

En la figura 4.18 se recoge la misma información que en la anterior, pero para $f_0 = 0,0071$.

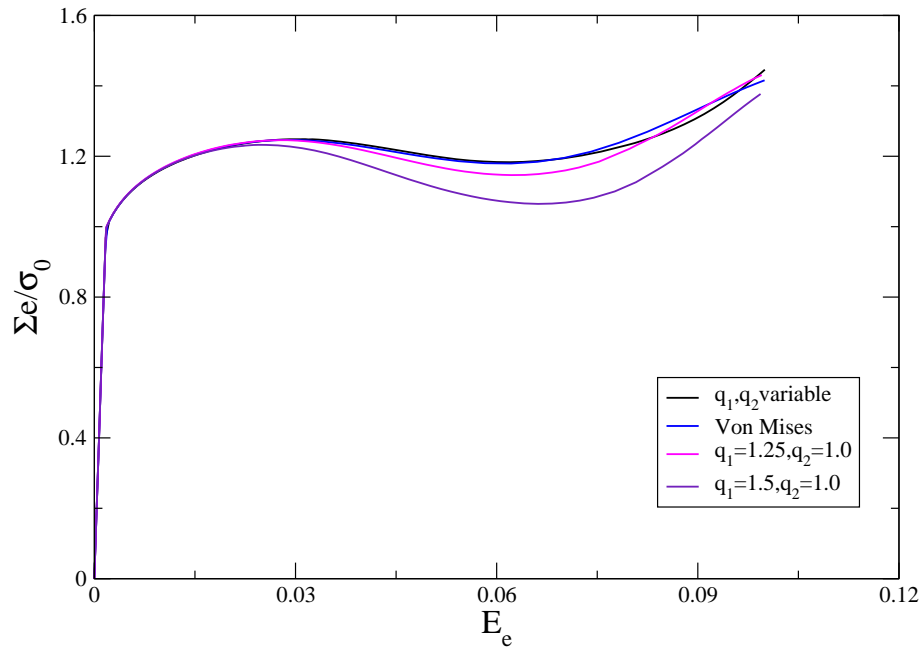


Figura 4.17: Relación tensión-deformación con $f_0 = 0,001$ y variación cuadrática de T

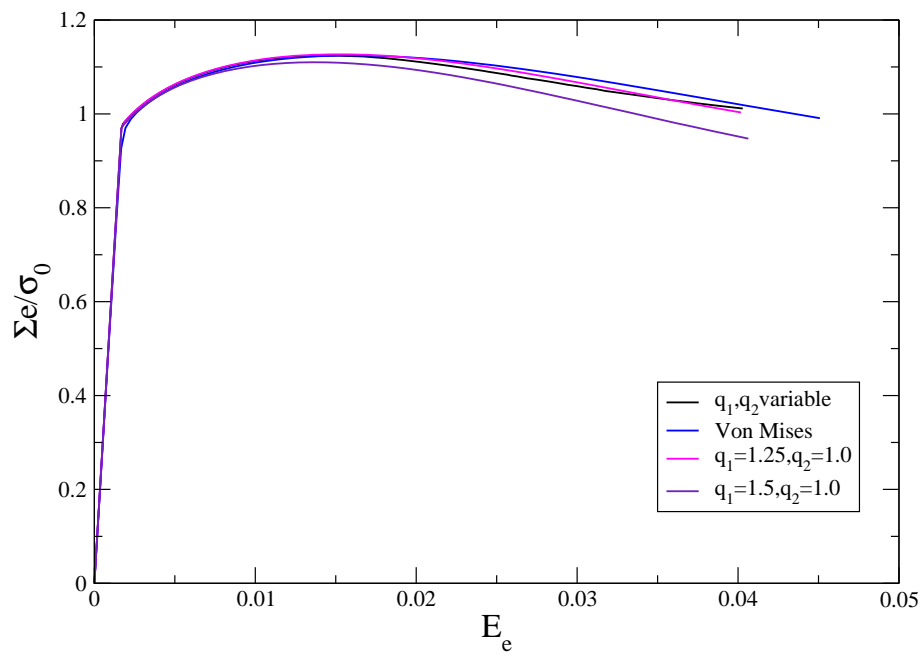


Figura 4.18: Relación tensión-deformación con $f_0 = 0,0071$ y variación cuadrática de T

A partir de los resultados obtenidos en las figuras 4.17 y 4.18 se observa cómo para ambos valores de daño inicial $f_0 = 0,001$ y $f_0 = 0,0071$, el modelo de Gurson con parámetros q_1 y q_2 variable es el que mejor se aproxima a los resultados correspondientes al modelo de Von Mises con hueco. También se observa en ambas gráficas cómo considerar valores constantes de $q_1 = 1,25$ y $q_2 = 1,0$ presenta mejores resultados que considerar valores constantes $q_1 = 1,5$ y $q_2 = 1,0$, y para el caso de $f_0 = 0,0071$ (figura 4.18) el resultado para $q_1 = 1,25$ y $q_2 = 1,0$ es tan preciso como considerar q_1 y q_2 variable.

Caso 2: Triaxialidad con variación lineal creciente

Como segundo caso se ha considerado una triaxialidad lineal creciente E_e según la ecuación:

$$T = 2 * \left(\frac{E_e}{0,2} \right) + 1 \quad (4.50)$$

que se representa en la figura 4.19.

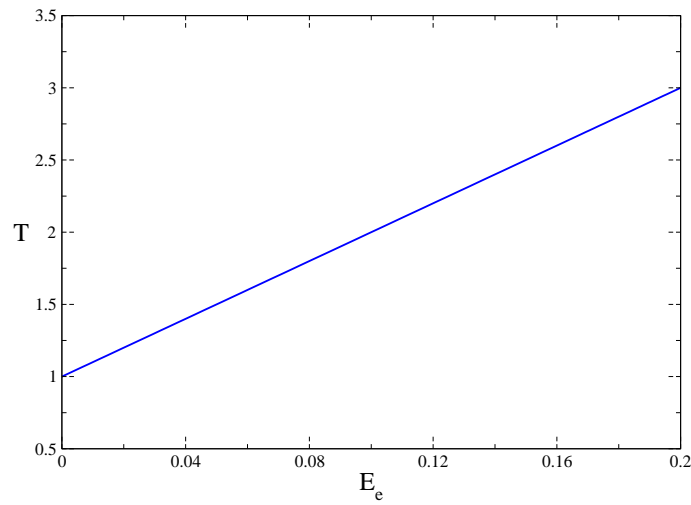


Figura 4.19: Variación lineal con pendiente positiva de la triaxialidad en función de E_e .

En las figuras 4.20 y 4.21 se muestra la tensión equivalente macroscópica adimensionalizada para $f_0 = 0,001$ y $f_0 = 0,0071$ respectivamente, para los casos de modelo de Von Mises con hueco y modelos de Gurson considerando parámetros constantes ($q_1 = 1,5$, $q_2 = 1,0$ y $q_1 = 1,25$, $q_2 = 1,0$) y parámetros variables.

Se observa cómo, tanto para el caso de porosidad inicial $f_0 = 0,001$ (figura 4.20) como para el caso de $f_0 = 0,0071$, (figura 4.21), considerar parámetros q_1 y q_2 variables ajusta mejor los resultados al caso de celda con hueco que considerar parámetros constantes. Para el caso de daño inicial $f_0 = 0,0071$, el caso de parámetros constantes $q_1 = 1,25$ y $q_2 = 1,0$ produce tan buenos resultados como el caso con parámetros variables.

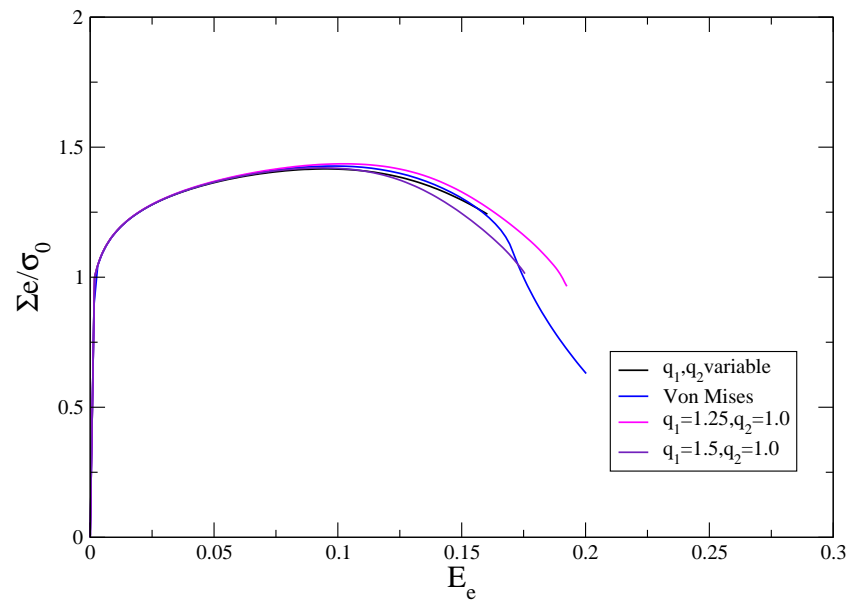


Figura 4.20: Relación tensión-deformación con $f_0 = 0,001$ y variación lineal con pendiente positiva de T

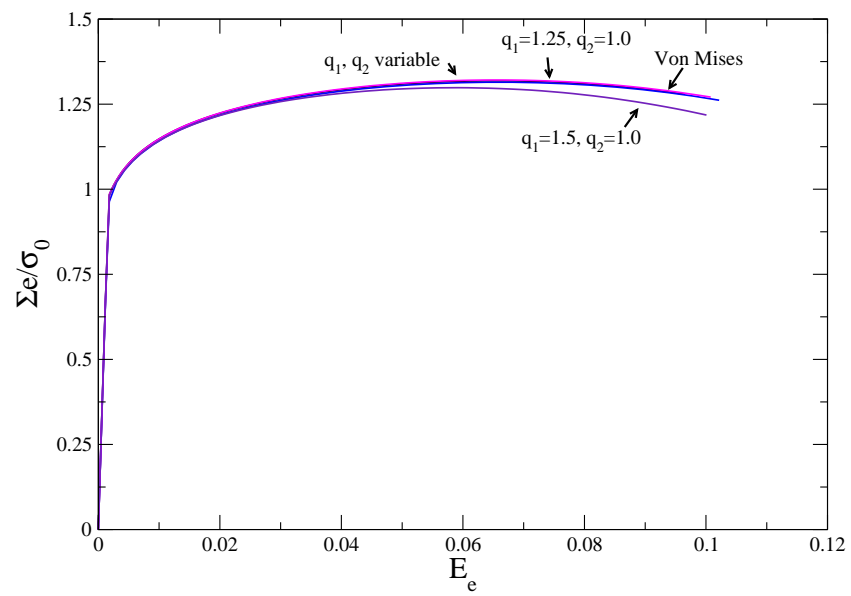


Figura 4.21: Relación tensión-deformación con $f_0 = 0,0071$ y variación lineal con pendiente positiva de T

Caso 3: Triaxialidad con variación lineal decreciente

El tercer caso analizado consiste en una variación de triaxialidad lineal decreciente con E_e de expresión:

$$T = -0,5 \left(\frac{E_e}{0,1} \right) + 3 \quad (4.51)$$

representada en la figura 4.22.

Las figuras 4.23 y 4.24 muestran la variación de la tensión equivalente macroscópica para los modelos de Von Mises y con parámetros constantes y variables antes mencionados. La figura 4.23 corresponde al caso de porosidad inicial $f_0 = 0,001$ y la figura 4.24 al caso $f_0 = 0,0071$.

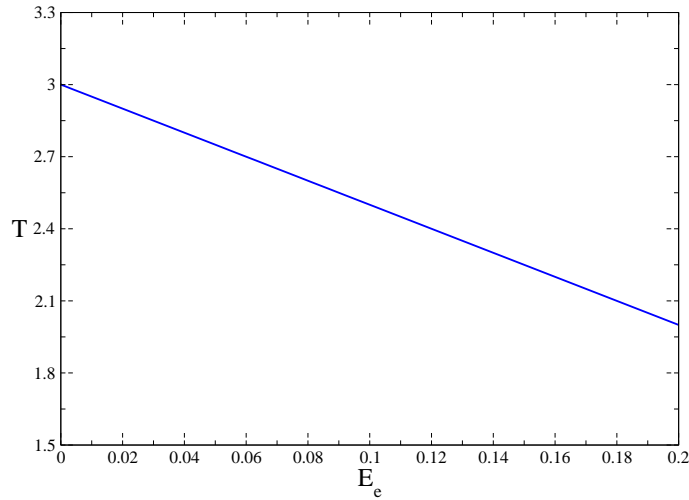


Figura 4.22: Variación lineal con pendiente negativa de la triaxialidad en función de E_e

Se observa en ambas gráficas cómo considerar parámetros q_1 y q_2 variables mejora los resultados respecto a considerar parámetros constantes. Para ambos casos de daño inicial (figuras 4.23 y 4.24), las curvas $\Sigma_e/\sigma_0 - E_e$ para valores de q_1 y q_2 constantes se alejan más a los resultados del modelo de celda con hueco que los casos con valores de q_1 y q_2 dependiente con la triaxialidad.

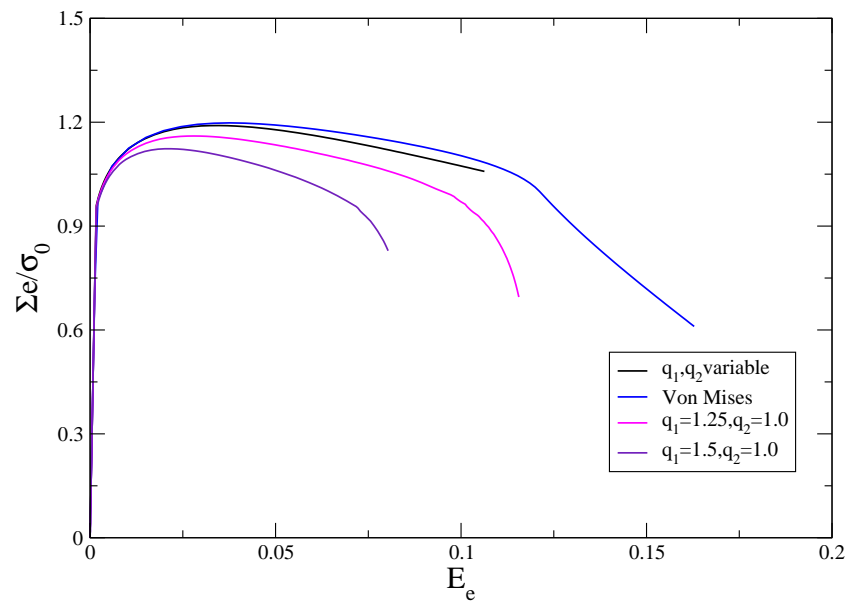


Figura 4.23: Relación tensión-deformación con $f_0 = 0,001$ y variación lineal con pendiente negativa de T

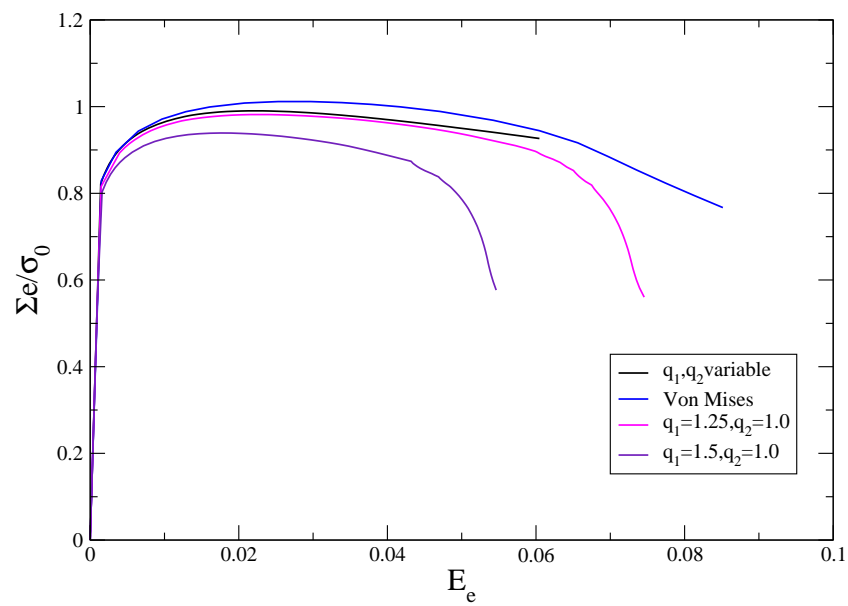


Figura 4.24: Relación tensión-deformación con $f_0 = 0,0071$ y variación lineal con pendiente negativa de T

4.5. Comparación con resultados experimentales

Con el modelo de Gurson con parámetros dependientes del campo tensional, se ha simulado ensayos de tracción estática sobre probetas entalladas lateralmente con entallas de diferente radio de curvatura, en las que se generan distintos estados de triaxialidad.

El material elegido para los ensayos de tracción es un acero inoxidable ferrítico DIN: X6Cr17.

4.5.1. Resultados experimentales

Se han ensayado probetas con tres geometrías distintas como se muestran en la figura 4.25. Las probetas tipo A son probetas cilíndricas de tracción convencionales que se han ensayado con el objetivo de obtener la curva tensión-deformación del material. Las probetas tipo B y tipo C son probetas entalladas lateralmente cuyas geometrías de entalla que se pueden apreciar en la figura 4.25. El ensayo se ha realizado con control de desplazamiento en una máquina universal de ensayos Instron 8516 usando una célula de carga 100 kN e imponiendo una velocidad de desplazamiento en el cabezal móvil de velocidad de 0,3 mm/min.

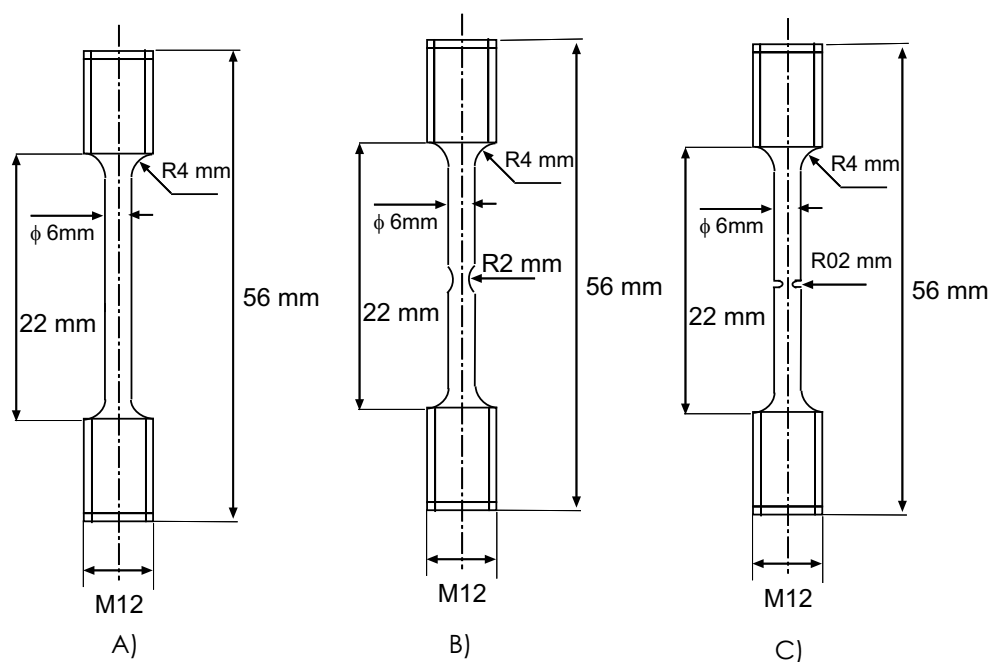


Figura 4.25: Geometría de las probetas con distinta entalla

Durante los ensayos de tracción se ha medido tanto la carga aplicada, como el desplazamiento relativo entre dos puntos de la probeta simétricos con relación al plano de la entalla. La medida de este desplazamiento se ha obtenido con un extensómetro longitudinal de 12,5 mm de longitud base. En la figura 4.26 se muestra la disposición del extensómetro sobre una de las probetas ensayadas.



Figura 4.26: Montaje del extensómetro sobre una de las probetas ensayadas

De los resultados del ensayo de las probetas tipo se ha obtenido la curva tensión de formación del material que se muestra en la figura 4.27. Además, para el material se ha tomado un valor de módulo de elasticidad $E = 195$ GPa y un coeficiente de Poisson ν de valor 0,3.

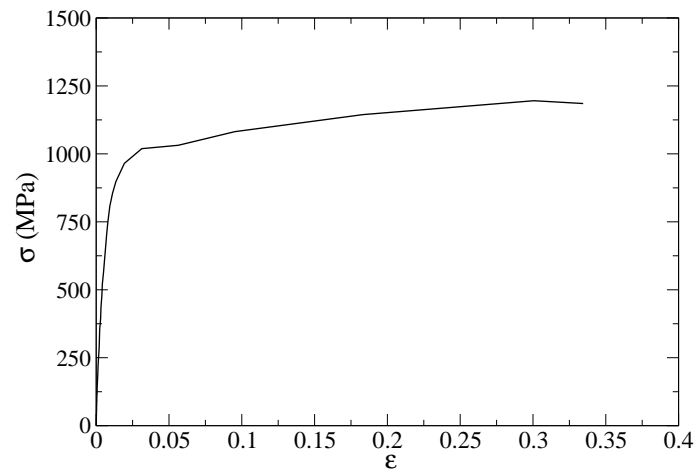


Figura 4.27: Curva tensión-deformación del acero X6Cr17

4.5.2. Simulación numérica

Los ensayos de tracción sobre las probetas se han simulado numéricamente por el método de los elementos finitos mediante el código ABAQUS/Standard utilizando una subrutina de usuario UMAT que implementa el algoritmo desarrollado. Debido a la doble simetría del problema, únicamente ha sido necesario simular 1/4 de las probetas. La mallas utilizadas en el análisis constan de 950 elementos en el caso de la probeta con entalla $R=2,0$ y de 750 elementos para la probeta con entalla $R=0,2$ (figuras 4.28 y 4.29 respectivamente). El tipo de elementos empleado es CAX8R en ambas probetas. Se ha realizado además en los dos casos analizados un afinamiento de las mallas en la zona más próxima al fondo de la entalla.

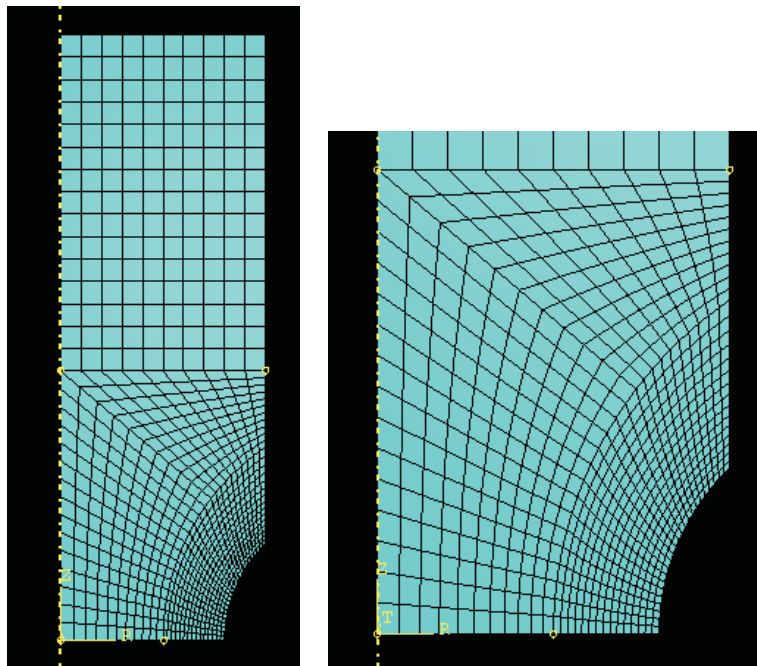


Figura 4.28: Malla para la probeta con entalla $R=2,0$ y detalle en el fondo de la entalla

Utilizando un modelo GTN con parámetros fijos se han ajustado los valores numéricos obtenidos con dicho modelo a los resultados experimentales correspondientes a la probeta con radio de curvatura de entalla $R = 2,0$ mm. Los parámetros con los que se ha conseguido concordancia entre ambos resultados (ver figura 4.30) son: $f_0 = 0,015$, $f_c = 0,06$, $f_F = 0,2$, $q_1 = 1,5$ y $q_2 = 1,0$

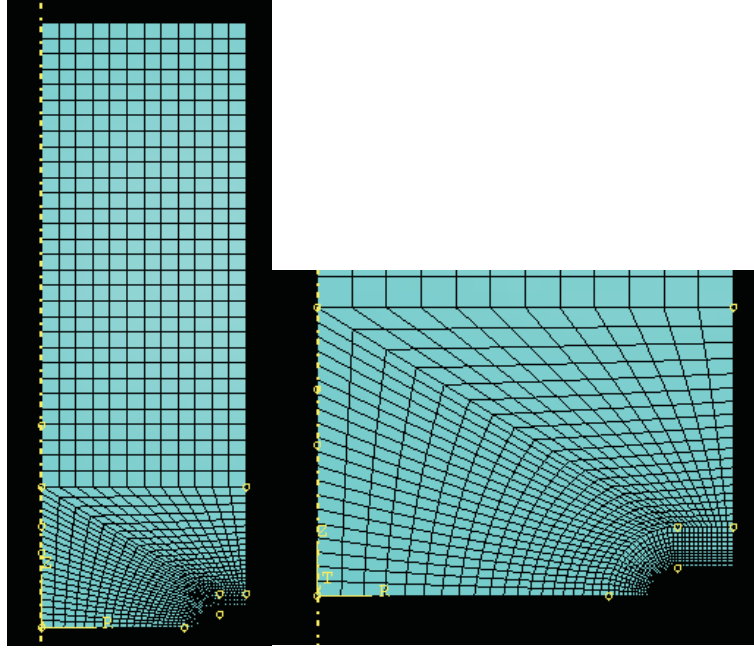


Figura 4.29: Malla para la probeta con entalla $R=0,2$ y detalle en el fondo de la entalla

Hay que hacer notar que por simplicidad no se ha considerado nucleación de microvacíos ni coalescencia utilizando Thomason.

Con los parámetros obtenidos para la primera probeta se ha simulado el ensayo correspondiente a la de radio de entalla de $R = 0,2$ mm y se han comparado los resultados experimentales, comparación que se muestra en la figura 4.31.

Como puede observarse, los resultados experimentales correspondientes a ambas probetas, que presentan diferentes estados de triaxialidad, no pueden ser ajustadas con un mismo grupo de parámetros.

A partir de las curvas de variación de q_1 y q_2 con T y f_0 [35], se han obtenido los parámetros correspondientes a la porosidad $f_0 = 0,015$ para diferentes valores de triaxialidad. Los parámetros obtenidos se han ajustado a un polinomio de tercer grado (ver figura 4.32).

$$q_1 = A_1 T^3 + B_1 T^2 + C_1 T + D_1 \quad (4.52)$$

$$q_2 = A_2 T^3 + B_2 T^2 + C_2 T + D_2 \quad (4.53)$$

cuyos parámetros se recogen en la tabla 4.3.

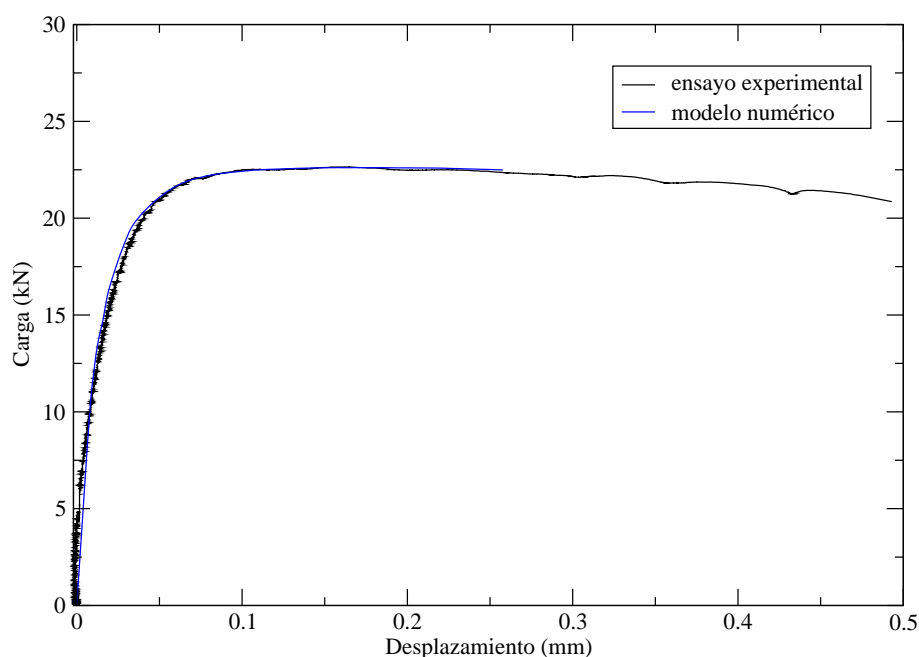


Figura 4.30: Ajuste del modelo de Gurson a la curva carga-desplazamiento experimental para la probeta con radio $R=2,0$

	A_1	B_1	C_1	D_1		A_2	B_2	C_2	D_2
q_1	0,0281	-0,4459	1,5497	-0,0038	q_2	-0,04	0,3667	-0,9867	1,71

Tabla 4.3: Parámetros de interpolación para q_1 y q_2 y $f_0=0,015$

Los resultados experimentales se han vuelto a comparar con los correspondientes al modelo con parámetros variables y el resultado de esa comparación se muestra en la figura 4.33 (probeta B) y 4.34 (probeta C).

Puede observarse que con la utilización de parámetros no constantes (variables con la triaxialidad) se pueden ajustar completamente los resultados correspondientes a las dos probetas ensayadas.

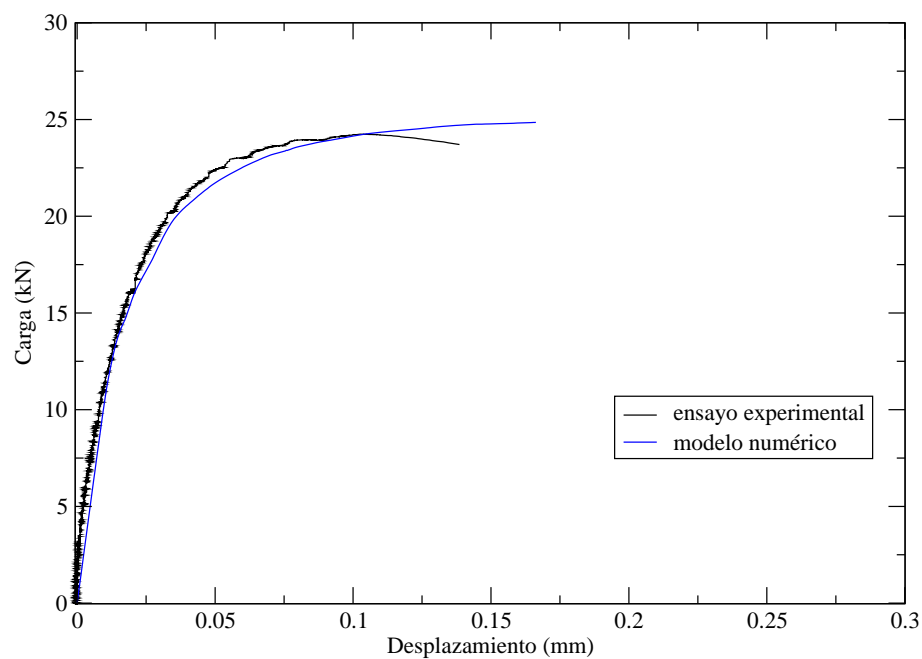


Figura 4.31: Ajuste del modelo de Gurson a la curva carga-desplazamiento experimental para la probeta con radio $R=0,2$

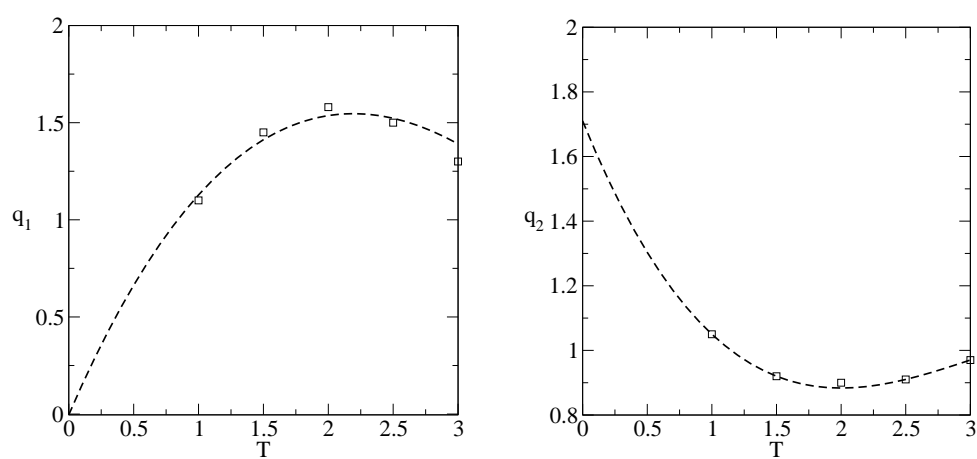


Figura 4.32: Ajuste de los parámetros de Gurson para $f_0 = 0,015$

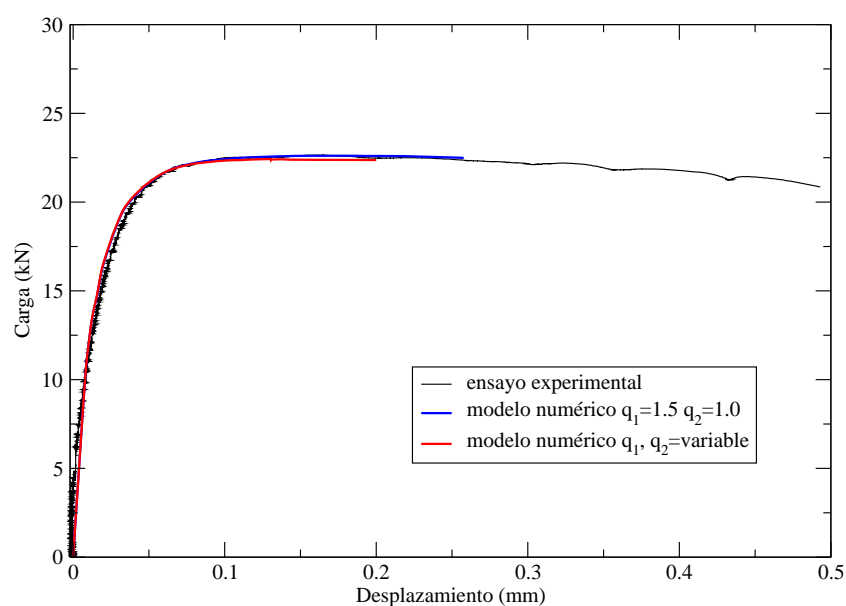


Figura 4.33: Ajuste del modelo de Gurson a la curva carga-desplazamiento experimental para la probeta con radio $R=2,0$

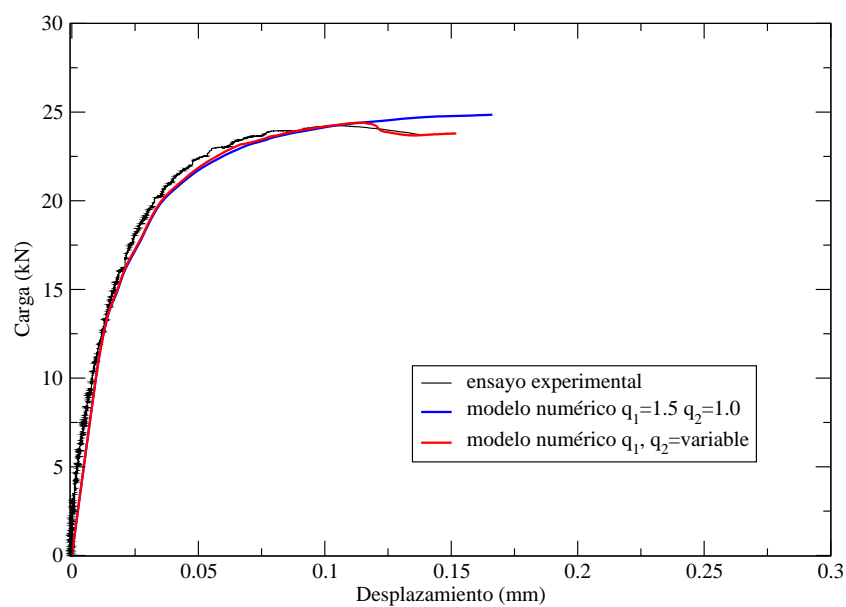


Figura 4.34: Ajuste del modelo de Gurson a la curva carga-desplazamiento experimental para la probeta con radio $R=0,2$

Capítulo 5

INFLUENCIA DE LA POROSIDAD EN LA CAVITACIÓN EN METALES DÚCTILES

5.1. Introducción

Los fenómenos de inestabilidad por cavitación son fenómenos en los que se observa un rápido crecimiento de un microvacío sin aumento de las deformaciones o de las tensiones en puntos alejados del hueco se produce en aquellos casos en los que las tensiones son lo suficientemente altas para que el trabajo elástico liberado en los alrededores del microvacío sea capaz de asegurar su crecimiento.

Estos niveles altos de tensión se alcanzan típicamente en sistemas de metal-cerámica, en los que el confinamiento del flujo plástico del metal permite alcanzar altos valores de triaxialidad. Para casos de láminas de metal dúctil situadas entre dos bloques cerámicos y sometida a un estado tensional con altos niveles de triaxialidad, el flujo plástico del metal tiende a provocar inestabilidades por cavitación. En este experimento, la lámina de metal delgada alcanza altos niveles de triaxialidad cuando es cargada con una tensión normal a la lámina, mientras que la deformación en dirección tangencial no puede exceder la deformación elástica en la cerámica.

Otros experimentos muestran rápidos crecimientos de microvacíos en situaciones de triaxialidad alta. Así, para alúmina (Al_2O_3) reforzada con partículas de aluminio y sometida a un estado tensional con triaxialidades altas, Flinn et al. [100] observaron la presencia de un único hueco dominante en algunas de las partículas metálicas presentes en la su-

perficie de fractura.

Ashby et al. [101] encontraron también fenómenos de cavitación cuando confinaron un cable de plomo en el interior de un cilindro de vidrio de gran espesor, fisuraron dicho cilindro circunferencialmente y sometieron al cilindro a un ensayo de tracción uniaxial, de tal forma que toda la carga en el plano de fisura era soportada por el alambre metálico. El crecimiento inestable de huecos dio lugar a un proceso de fractura acelerado.

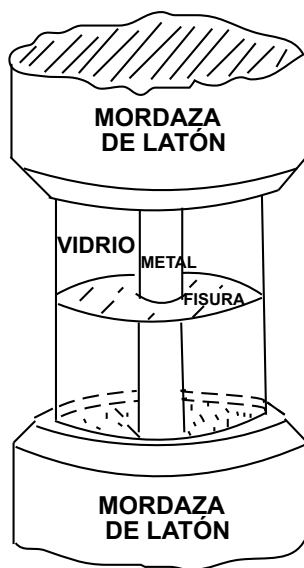


Figura 5.1: Cilindro de Ashby

Como se indicó en el Capítulo 2, las inestabilidades en el crecimiento de huecos han sido estudiadas por diferentes autores.

Huang et al. [73] y Tvergaard et al. [74], han observado que dichas inestabilidades también ocurren en el caso de microvacíos esféricos sometidos a estados tensionales axisimétricos cuando la relación entre la tensión radial y la tensión axial es próxima a la unidad (estados con alta triaxialidad). Así, en la figura (5.2) se muestra los límites de cavitación obtenidos en [74] para un hueco esférico sujeto a estados tensionales remotos bajo simetría axisimétrica para un material con propiedades plásticas $\sigma_0/E = 0,003$ y $\nu = 0,3$ y diferentes exponentes de endurecimiento por deformación N .

El fenómeno de cavitación en el cilindro de Ashby et al. [101]. ha sido analizado también recientemente por Tvergaard [102], al igual que la lámina delgada de metal dúctil confinada entre dos bloques de material metálico. En este último caso, el flujo plásti-

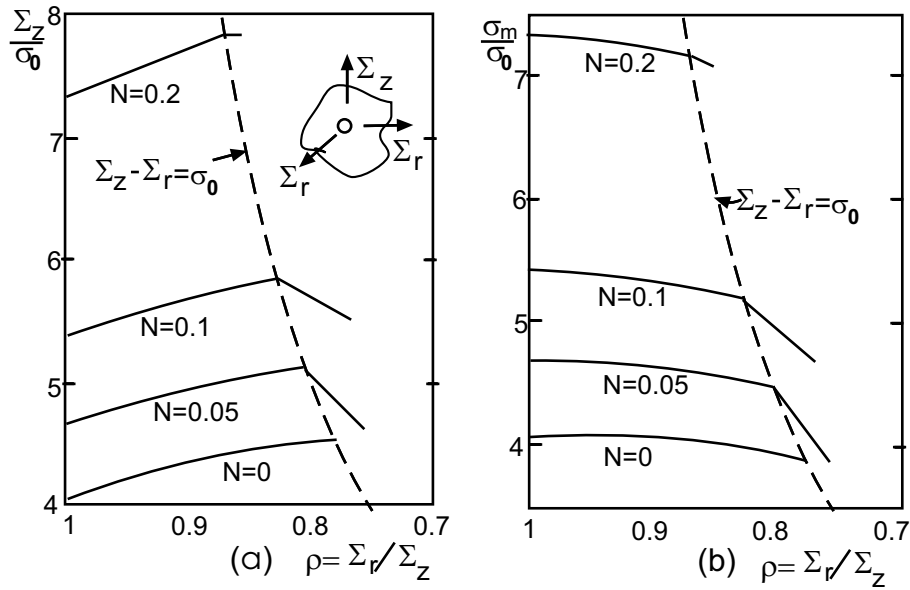


Figura 5.2: Límites de cavitación para un hueco esférico elasto-plástico con endurecimiento por deformación y un estado tensional remoto axisimétrico para $\sigma_0/E = 0,003$ y $\nu = 0,3$ (obtenida en [74]) (a) Tensión axial (b) Tensión media

co confinado tiende a promover un rápido crecimiento del hueco [103]. Para realizar un seguimiento numérico del crecimiento inestable del hueco (se pueden alcanzar volúmenes del hueco superiores a 10^{10} veces el volumen inicial, figura 5.3, [104],[105]) es necesario utilizar técnicas de remallado [104] .

Si el radio de los microvacíos es muy pequeño, el comportamiento no se describe correctamente utilizando una teoría convencional de plasticidad, sino que el modelo de material debe incluir efectos de tamaño y se debe usar un modelo de plasticidad no local [106], [107]. Esta influencia del tamaño en los fenómenos de inestabilidad por cavitación ha sido estudiada por Niordson y Tvergaard [108].

La mayoría de los análisis de inestabilidades por cavitación hasta ahora realizados suponen la presencia de un único hueco en un sólido infinito o fracciones de volúmenes de hueco de valor prácticamente nulo. Sin embargo, los metales contienen distribuciones de microvacíos de tamaños comparables, y es de gran interés estudiar cómo los huecos que rodean a uno dado afectan a la posible aparición de fenómenos de cavitación en alguno de ellos. Recientemente (Tvergaard [109], Tvergaard y Niordson [110]) han realizado análisis de celda con dos distribuciones de microvacíos con tamaño de radio diferente, observando

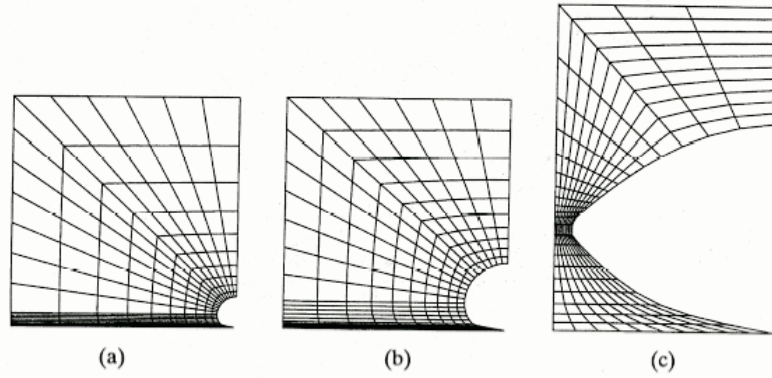


Figura 5.3: Distorsión de la malla por presencia de fenómenos de cavitación

una amplificación en los campos de tensiones en los huecos más pequeños debido a la presencia de otros más grandes a su alrededor.

A continuación se presenta una nueva aproximación a este fenómeno, considerando en este caso un modelo de celda unitario con un único hueco central, representado de forma discreta. El modelo del material que rodea al hueco central no sigue un modelo J_2 , sino que la distribución de microvacíos que rodean a dicho hueco central se modeliza con un modelo de Gurson ([26], [111]) en el que la variación del tamaño de huecos vendrá dada por la variación en la porosidad. Se analizarán casos teniendo en cuenta tanto porosidad inicial como nucleación progresiva y considerando alta triaxialidad para un modelo de celda axisimétrico, es decir, casos en los que puede producirse un crecimiento inestable por cavitación ($\rho \approx 1$).

5.2. Formulación del problema

El análisis que se ha llevado a cabo ha consistido en analizar el crecimiento de un hueco discreto situado en el centro de un sólido infinito que contiene otros huecos que a su vez nuclea y crecen, representado este últimos por una matriz continua con un modelo de material de tipo GTN. En el modelo de celda unitario cilíndrico, z representa la coordenada axial, r la coordenada radial y Θ la coordenada circunferencial. Las dimensiones iniciales de la celda unitaria toman los valores de R_0 y r_0 para el radio exterior del cilindro y el radio interior del hueco, respectivamente. La longitud de la celda en dirección axial

es también de valor R_0 . En el estudio se tienen en cuenta grandes deformaciones.

Las condiciones de contorno a las que está sometida la celda (figura 5.4) son las siguientes:

$$\dot{u}_r = 0, \quad \dot{\Sigma}_z = \dot{\Sigma}_\Theta = 0 \quad \text{en} \quad r = 0 \quad (5.1)$$

$$\dot{u}_r = \dot{U}_r, \quad \dot{\Sigma}_z = \dot{\Sigma}_\Theta = 0 \quad \text{en} \quad r = R_0 \quad (5.2)$$

$$\dot{u}_z = \dot{U}_z, \quad \dot{\Sigma}_r = \dot{\Sigma}_\Theta = 0 \quad \text{en} \quad z = R_0 \quad (5.3)$$

$$\dot{\Sigma}_r = \dot{\Sigma}_z = \dot{\Sigma}_\Theta = 0, \quad \text{en} \quad (r)^2 + (z)^2 = r_0^2 \quad (5.4)$$

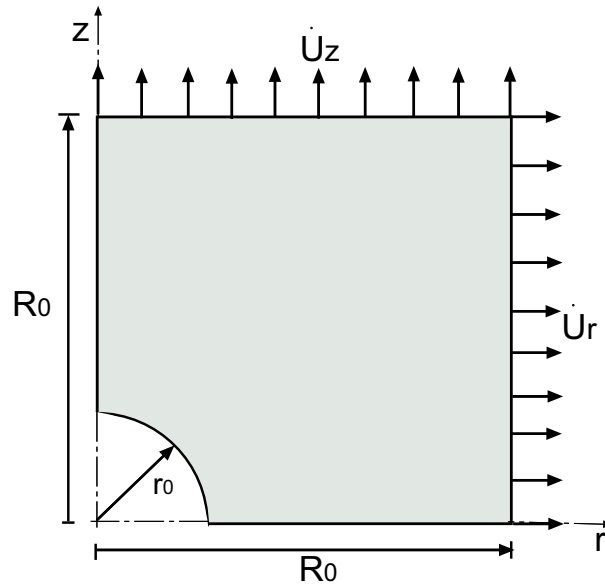


Figura 5.4: Condiciones de contorno y dimensiones de celda

Las constantes \dot{U}_r y \dot{U}_z representan variaciones de desplazamiento, y la relación \dot{U}_z/\dot{U}_r se calcula en cada incremento de tal forma que el parámetro $\rho = \Sigma_z/\Sigma_r$ sea un valor prescrito y fijo entre las tensiones verdaderas macroscópicas en dirección radial (Σ_r) y axial (Σ_z). Mantener constante el valor de ρ equivale a mantener constante la triaxialidad macroscópica, ya que existe una relación directa entre ambos parámetros cuya expresión es:

$$T = \frac{1}{3} \left(\frac{1 + 2\rho}{|1 - \rho|} \right) \quad (5.5)$$

Se utiliza un modelo de plasticidad con endurecimiento por deformación isótopo para describir el comportamiento de la matriz, con una condición de flujo de la forma $\Phi(q, p, \bar{\sigma}, f) = 0$. En esta expresión, $\bar{\sigma}$ representa el límite elástico de la matriz y f es la fracción de huecos. La expresión completa de la condición de flujo es de la forma:

$$\Phi = \frac{q^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{-3q_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) - (1 + (q_1 f)^2) = 0 \quad (5.6)$$

Donde $q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}$ es la tensión efectiva de Von Mises macroscópica, $p = -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1}$ la presión hidrostática, $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} + p : \mathbf{1}$ el tensor de tensiones desviadoras de Cauchy, y $q_1 = 1,5$ y $q_2 = 1$.

Para modelizar el efecto de la coalescencia, Tvergaard y Nedleman [29], sugirieron reemplazar en la ecuación anterior el valor de f por la función $f^*(f)$ de la forma:

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \frac{f_u^* - f_c}{f_F - f_c} & \text{si } f > f_c \end{cases}$$

donde $f_u^* = f^*(f_F)$ toma el valor $f_u = 1/q_1$. Los valores elegidos para las constantes f_c y f_F están basados en resultados experimentales y análisis numéricos, y son igual a $f_c = 0,15$ y $f_F = 0,25$.

La relación existente entre $\dot{\varepsilon}^p$ y $\dot{\bar{\sigma}}$ viene dada por la expresión:

$$\dot{\varepsilon}^p = \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \dot{\bar{\sigma}} \quad (5.7)$$

con E el módulo de young, y E_t la pendiente de la curva uniaxial de la tensión verdadera-deformación verdadera en el valor de $\bar{\sigma}$. Esta curva se representa por una ley de la forma:

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E} & \text{si } \sigma \leq \sigma_0 \\ \frac{\sigma_0}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{1/N} & \text{si } \sigma > \sigma_0 \end{cases}$$

siendo σ_0 y N el límite elástico uniaxial inicial de la matriz y el coeficiente de endurecimiento por deformación respectivamente.

La variación en la porosidad durante el incremento de deformación tiene dos componentes: una debido al efecto del crecimiento (primer término) y otra debida al efecto de la nucleación controlada por deformación (segundo término), y tiene la forma:

$$\dot{f} = (1 - f) \mathbf{d}^p : \mathbf{1} + A \dot{\varepsilon}^p \quad (5.8)$$

El crecimiento inestable de un microvacío por cavitación en un sólido infinito es impulsada por la energía elástica almacenada en dicho cuerpo, por lo tanto, tener en cuenta la disminución de las propiedades elásticas por el efecto del daño puede ser importante en el fenómeno de cavitación.

La dependencia de las propiedades elásticas con la porosidad normalmente no se incluye en el modelo de Gurson generalizado. En este caso, sin embargo, sí se ha tenido en cuenta esta dependencia. Para un sólido elástico que contiene una fracción de huecos esféricos, Tandon y Weng [112] obtuvieron las siguientes relaciones entre el módulo de Young macroscópico E y el coeficiente de Poisson ν , expresados en términos de los valores de E_0 y ν_0 de la matriz:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2E_0(7 - 5\nu_0)(1 - f)}{14 - 10\nu_0 + f(1 + \nu_0)(13 - 15\nu_0)} \\ \nu &= \frac{\nu_0(14 - 10\nu_0) + f(1 + \nu_0)(3 - 5\nu_0)}{14 - 10\nu_0 + f(1 + \nu_0)(13 - 15\nu_0)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Fleck y al. [113] sugirieron una relación más simple entre estos parámetros elásticos y la porosidad f , dadas por:

$$E = E_0(\hat{f} - f)/\hat{f}, \quad \nu = \nu_0(\hat{f} - f)/\hat{f} \quad (5.10)$$

El valor de \hat{f} recomendado es $\hat{f} = 0,36$. Para aleaciones estructurales, se considera más realista utilizar un valor de $\hat{f} = 1/q_1 = 0,66$.

5.3. Método numérico

Para resolver el problema numéricamente, se ha utilizado el método de los elementos finitos, basado en una formulación Lagrangiana implementado en un código desarrollado en la Universidad Técnica de Dinamarca (DTU) por el profesor Viggo Tvergaard. El dominio se discretiza con elementos triangulares axisimétricos. A su vez, estos triángulos se agrupan para formar cuadriláteros formados por triángulos cruzados. Existe un total de 53 cuadriláteros en la dirección radial, y 12 cuadriláteros en la dirección circunferencial. La integral de volumen se lleva a cabo utilizando un único punto de integración en cada uno de los elementos triangulares. La figura 5.5 ilustra el mallado tanto en la zona más alejada en el modelo de celda como en la parte central cerca del hueco esférico.

Cuando el análisis está próximo a la inestabilidad por cavitación ($f \approx f_c$), se utiliza la técnica de Rayleigh-Ritz [114] para grandes deformaciones con objeto de mejorar la

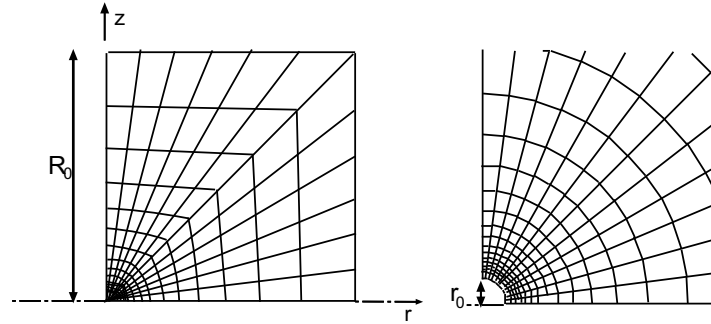


Figura 5.5: Malla utilizada en los análisis numéricos a) celda unitaria axisimétrica b) detalle de la malla en las proximidades del hueco

estabilidad numérica. Este método permite prescribir el desplazamiento de los nodos en la superficie del hueco central sin aplicar ninguna carga en vez de prescribir el desplazamiento en la frontera de la celda unitaria.

El fallo dúctil, cuando f alcanza el valor f_F , se ha tratado en este caso utilizando un método que consiste en hacer el valor de la función de plastificación Φ muy pequeño cuando un elemento alcanza el valor de la porosidad final f_F . Esto se consigue dado un valor de $f^*(f) = 0,9f_u$ o $f^*(f) = 0,99f_u$ según el caso, y manteniendo el valor para ese elemento constante hasta el final del análisis .

5.4. Resultados

En los análisis realizados, la relación entre el radio inicial de hueco y el radio exterior del cilindro es de valor $r_0/R_0 = 1/3000$, por lo que la porosidad debido al hueco central es muy pequeña (tiene un valor de $2,5 \cdot 10^{-11}$). Las propiedades del material son, en la mayoría de los casos analizados, $\sigma_0/E = 0,003$ y $\nu = 0,3$, con un exponente de endurecimiento $N = 0,1$. El valor de la fracción de huecos inicial, f_0 , o de los parámetros de nucleación, serán diferentes para cada uno de ellos.

En primer lugar y utilizando las expresiones (5.9) y (5.10) se estudia el efecto de tener en cuenta la porosidad en las propiedades elásticas del material en el modelo de Gurson generalizado . Para un valor muy alto de porosidad inicial, $f_0 = 0,1$, con una relación de tensiones macroscópicas $\rho = \Sigma_r/\Sigma_z = 0,9$ y un valor de $N = 0,1$, la figura 5.6

muestra una comparación entre la tensión axial normalizada con el límite elástico Σ_z/σ_0 frente a la relación de cambio de volumen del hueco central V/V_0 con y sin modificación de las propiedades elásticas utilizando en el caso modificado la relación de Tandon y Weng (5.9). Este valor tan alto de f_0 está muy por encima de valores realistas de porosidad en metales estructurales, pero podría ser relevante para metales fabricados por compactación de polvos, como los estudiados en [26]. Incluso a estos niveles de f_0 , el valor de tensión de la figura (5.6) se ve sólo reducida en un 1,9 % cuando se utiliza la modificación (5.9), y una comparación similar para un valor de $f_0 = 0,01$ muestra diferencias de sólo un 0,2 %. También se ha probado la modificación dada por (5.10), y se ha encontrado que para un valor de $\hat{f} = 0,66$ el efecto es similar al encontrado para (5.9). Para (5.10) con $\hat{f} = 0,36$, el valor es un poco mayor, de un 3 % en el caso de tener un daño inicial f_0 de 0,1, siendo aún en ese caso un valor muy pequeño. Aunque se ha demostrado que la influencia de la porosidad en las propiedades elásticas son pequeñas, se ha utilizado en todos los cálculos la modificación propuesta en (5.9).

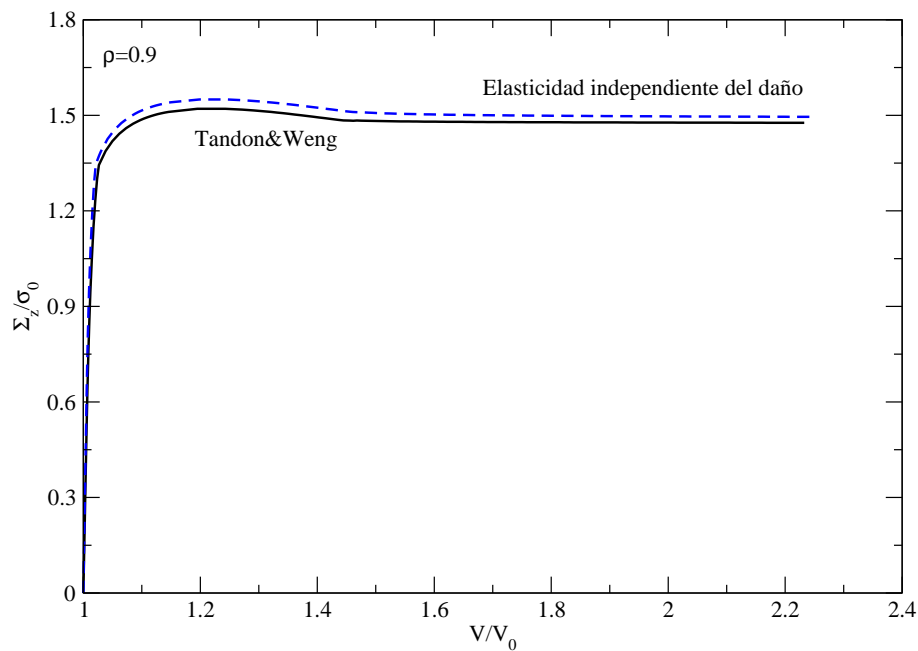


Figura 5.6: Relación Σ_z/σ_0 - V/V_0 considerando propiedades elásticas con y sin efecto de daño, para $f_0 = 0,1$, $\rho = 0,9$ y $N = 0,1$

La figura 5.7 muestra, utilizando una relación de tensiones macroscópicas $\rho = 0,9$ y un exponente de endurecimiento por deformación $N = 0,1$, la influencia que tiene en

la respuesta del modelo utilizar diferentes valores de porosidad inicial. En estos análisis no se ha incluido el efecto de la nucleación. Las curvas muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de porosidad inicial en el modelo de Gurson (0, 0,0001, 0,0003, 0,001, 0,003, 0,01 y 0,1). Estos cálculos se han continuado hasta alcanzar relaciones de volúmenes del hueco central V/V_0 por encima de 40,7. Los niveles de tensión encontrados en este punto para porosidad inicial nula alcanzan una relación de $\Sigma_z/\sigma_0 = 5,681$, que es una buena aproximación al límite de cavitación inestable obtenida en [74] (figura 5.2). La figura 5.7 muestra cómo el máximo nivel de tensión se reduce de forma significativa con la presencia de porosidad en el material que rodea el hueco central. Incluso para un valor muy pequeño de porosidad inicial ($f_0 = 0,0003$), la tensión máxima se reduce de forma considerable, $((\Sigma_z/\sigma_0)_{max} = 4,54)$. La curva para este valor de f_0 sigue muy de cerca la que se obtiene para un valor de porosidad idénticamente nula, pero en este caso el valor máximo se alcanza a un valor de relación de volúmenes del hueco $V/V_0 = 1,81$, por lo que la tensión nunca alcanza el nivel de inestabilidad por cavitación. A partir de este momento, la tensión macroscópica cae rápidamente para un valor casi constante de V/V_0 , y el caso se hace tan inestable que fue difícil de continuar. Este comportamiento se encontró también para una porosidad inicial $f_0 = 0,0001$, pero con inestabilidades numéricas aún más fuertes, por lo que la parte de descenso de la curva tras el máximo no es visible en la figura

Para entender mejor los resultados encontrados en $f_0 = 0,0003$, y $f_0 = 0,001$ en cuanto a la caída brusca de tensión observada en las curvas, se realizó un análisis exhaustivo del comportamiento del material para $f_0 = 0,001$. En este caso y a una relación entre el volumen del hueco central con respecto a su volumen inicial $V/V_0 = 1,59$, justo después de la caída rápida de tensión, la fracción de microvacíos f en las proximidades del hueco central ha crecido hasta un valor de $f = 0,02$. Sin embargo, a una distancia del hueco aproximada de $4,5 r_0$ y en el plano de simetría $r = 0$ se ha generado un daño ligeramente superior y de valor $f = 0,03$ a lo largo de una superficie toroidal. Posteriormente la fracción de huecos empieza a crecer rápidamente en zonas próximas a dicha superficie dando lugar a una inesperada y brusca disminución de los valores de tensión macroscópicos, tal y como se muestra en la figura 5.7. Después de la caída de tensión los huecos empiezan a crecer localmente en dicha región. La figura 5.8 muestra un dibujo del contorno de líneas de porosidad constante a un valor de V/V_0 igual a 1,76, donde el máximo valor de f es aproximadamente igual a 0,04. El comportamiento del máximo de carga para $f_0 = 0,0003$ es similar al que aparece para $f_0 = 0,001$, pero la caída de tensión es más abrupta.

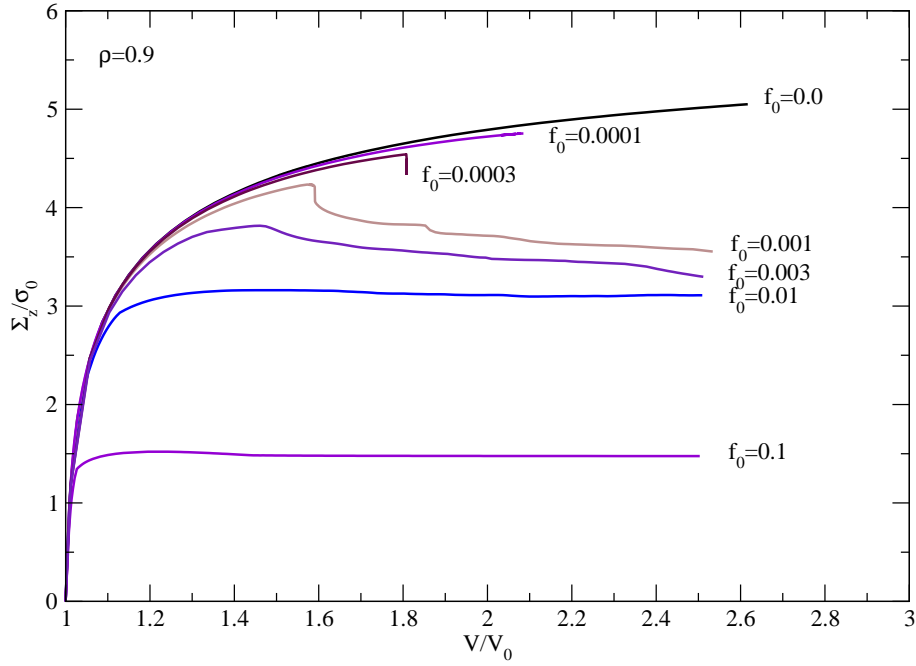


Figura 5.7: Influencia de f_0 para $\rho = 0,9$ y $N = 0,1$ sin considerar nucleación.

La figura 5.9 muestra curvas similares a las de la figura 5.7 para un valor de $\rho = 1,0$. En este caso aparece una pequeña reducción de carga para $f_0 = 0,001$, a un valor de $V/V_0 = 2,54$ y siguiendo un comportamiento análogo al ilustrado en las figuras 5.7 y 5.8. En esta curva, y justo después de la caída de tensión, se genera un aumento uniforme de porosidad a lo largo de una superficie esférica a cierta distancia del hueco central. Si el modelo de celda para este caso con tensión hidrostática pura ($\rho = 1$) hubiese tenido simetría esférica, hubiese sido necesaria una bifurcación que hiciera posible este crecimiento de daño desviado de la simetría. La simetría cilíndrica de nuestro modelo de celda introduce una pequeña imperfección que hace posible un crecimiento de porosidad local similar al mostrado en la figura 5.8 ahora localizado sobre el eje r y alejado varios radios del hueco central. Para el valor más pequeño de porosidad inicial analizado, $f_0 = 0,0003$, el cálculo se detiene debido a la presencia de inestabilidades numéricas. Es posible que el máximo de tensión no se haya alcanzado en este punto, sin embargo se espera que el valor final de tensión sea muy próximo al máximo. Para el resto de valores de porosidad analizados se produce una disminución regular en la carga tras alcanzar el máximo. Esto se debe a que la porosidad local se localiza cerca del hueco central, lo que permite un mayor aumento de f antes de alcanzar problemas de inestabilidad.

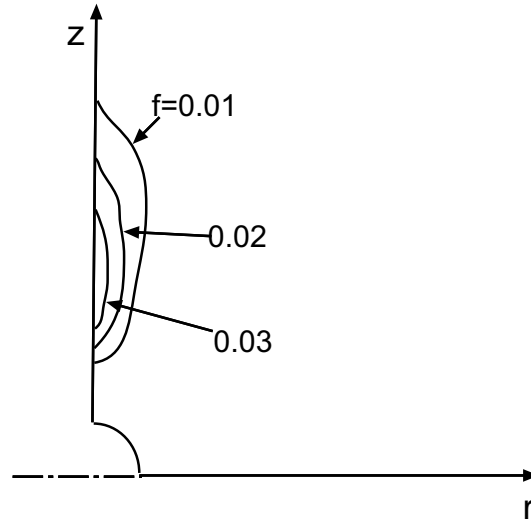


Figura 5.8: Líneas de porosidad constante para $f_0 = 0,001$, $\rho = 0,9$, $N = 0,1$ y $V/V_0 = 1,76$. La figura muestra la formación de una región toroidal de alto valor de porosidad cerca del plano de simetría $r = 0$

En un material real, los microvacíos que rodean a un hueco central serán microvacíos discretos con sus centros localizados en puntos concretos del material. Las predicciones que se han obtenido tendrán mayor o menor validez en función de dónde estén localizados dichos huecos discretos. En el caso de las curvas de distribución del daño de la figura 5.8, las predicciones encontradas serán relevantes para situaciones donde existan previamente microvacíos o en el interior o en regiones próximas a la zona toroidal mostrada en la figura como la zona donde se alcanzan mayores valores de porosidad. Si no ocurre esto, el decaimiento rápido de la carga observado en la figura 5.7 para distintos valores de f_0 no se espera que pueda ocurrir. Si los huecos discretos se encuentran inicialmente localizados a cierta distancia de la zona toroidal, se espera que ocurra un comportamiento similar de descenso de carga pero con cierto retraso. Un comentario análogo se puede aplicar a las curvas de $\rho = 1$ de la figura 5.9. En este caso la región que alcanza mayores niveles de porosidad se encuentra formando una superficie esférica centrada en el eje r y alejada varios radios del hueco central.

La figura 5.10 muestra las curvas de tensión máxima en función de $\rho = \Sigma_r/\Sigma_z$ para diferentes valores de porosidad inicial. Estas curvas están obtenidas a partir de los valores de tensión máxima que se alcanzan en las curvas 5.7 y 5.9 y en otras calculadas para $\rho = 0,95$ y $\rho = 0,85$. Se observa cómo en el intervalo analizado, para $1,0 \geq \rho \geq 0,85$,

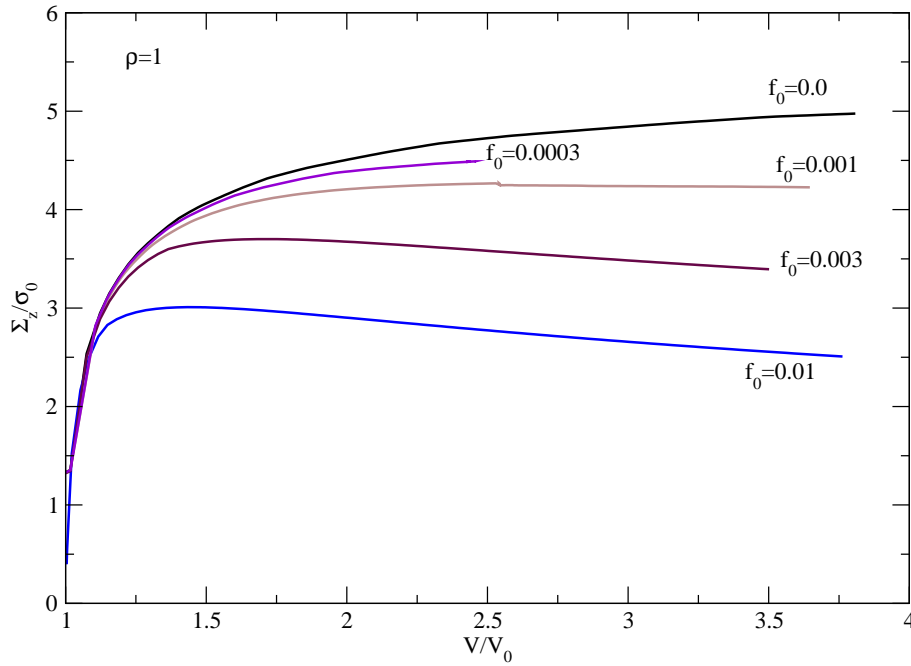


Figura 5.9: Influencia de f_0 para $\rho = 1,0$ y $N = 0,1$ sin considerar nucleación.

los valores de tensión máxima alcanzados se encuentran en todos los casos por debajo de la tensión de cavitación para $f = 0$ (figura 5.2) y los valores que se obtienen varían considerablemente con ρ .

Las curvas que relacionan la tensión macroscópica en dirección z , Σ_z , adimensionalizadas con σ_0 , frente al volumen del hueco central V , adimensionalizado con su volumen inicial V_0 , se muestran en la figura 5.11 para un valor de $\rho = 0,9$ y $N = 0,1$ con porosidad inicial nula, $f_0 = 0$, pero donde los huecos nuclean para distintos valores de ε_N y f_N . En este caso tener en cuenta el efecto de la porosidad f en los parámetros elásticos es menos importante que en los casos en los que se considera porosidad inicial, debido a que la fracción volumétrica de porosidad es ahora nula en todas partes, excepto en una pequeña región en las proximidades del hueco central. Las curvas que se obtienen para el valor $\varepsilon_N = 0,3$, y $f_N = 0,03$ y $0,01$ están muy próximas a la curva para $f = 0$ (sin porosidad inicial), pero los valores máximos de carga son menores, y dichos valores de carga máxima ocurren a valores de V/V_0 muy inferiores a los alcanzados para $f = 0$. La curva para $f_N = 0,03$ y $\varepsilon_N = 0,15$ es similar a las anteriores, pero alcanza valores de tensión menores para valores también inferiores de V/V_0 .

Para considerar la influencia del endurecimiento por deformación se ha realizado un

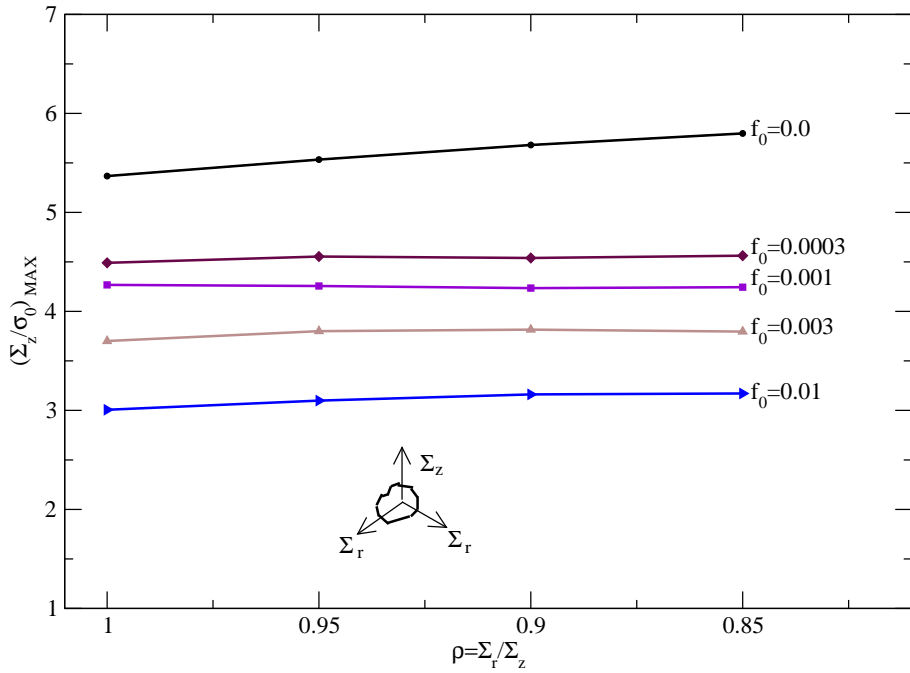


Figura 5.10: Curvas de máximos valores de Σ_z/σ_0 para varios valores de f_0 y $N = 0,1$ sin nucleación.

análisis teniendo en cuenta un valor de $N = 0,2$. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.12. Estos resultados son bastante similares a los de la figura 5.7, pero ahora los valores máximos de Σ_z/σ_0 son mayores en todos los casos, como cabe esperar debido al mayor endurecimiento por deformación. La curva para $f_0 = 0,0001$ puede ser en este caso continuada hasta valores posteriores al máximo de carga, sin embargo rápidamente la simulación comienza a ser numéricamente inestable. El resto de curvas presentan menor inestabilidad computacional que la figura 5.7, decayendo los valores de carga de forma suave tras alcanzar sus valores máximos.

Como se mencionó anteriormente, el fallo final de tipo dúctil se representa numéricamente por el procedimiento en el que, una vez se alcanzada $f^* = rf^*(f_F)$ en un punto, el valor de f se mantiene constante en dicho punto hasta el final de la simulación. El elemento dañado se representa en ese momento como un elemento elástoplástico con un valor de función de plastificación Φ pequeña. El valor elegido para r ha sido $r = 0,9$ en la mayoría de los casos, sin embargo ha sido necesario utilizar valores más próximos a 1 en algunas ocasiones. Así, en la figura 5.12, las curvas para $f_0 = 0,01$ y $f_0 = 0,003$ mostraron un comportamiento inesperado en el que el valor de la carga comenzó a crecer lentamente

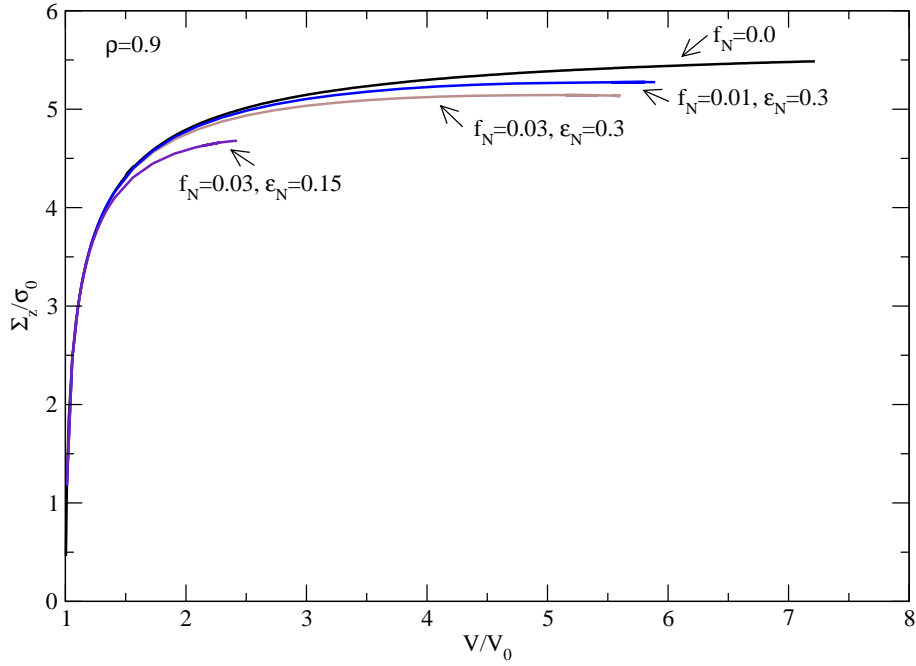


Figura 5.11: Influencia de la nucleación controlada por deformación, para $f_0 = 0,0$, $\rho = 0,9$ y $N = 0,1$.

tras alcanzar la condición de fallo de $r = 0,9$ a un valor de $V/V_0 \approx 2,3$. Esta tendencia se eliminó utilizando un valor de r mayor, $r = 0,99$. En la figura 5.7, donde la condición de fallo para $f_0 = 0,03$ se alcanza para $V/V_0 \approx 2,0$, la simulación se ha repetido para un valor de $r = 0,99$ y se ha observado que en la ultima zona de la curva se alcanzan menores valores de tensión a los obtenidos para $r = 0,9$. Utilizando $r = 0,99$ en todos los casos hubieramos sido más realistas, sin embargo estos casos son también numéricamente más inestables por lo que se ha limitado su utilización.

Los resultados encontrados muestran valores máximos de tensión macroscópica a valores de V/V_0 relativamente pequeños. La tensión máxima se alcanza rápidamente, y debido a la evolución de la porosidad en el material, existe un progresivo descenso en las tensiones en puntos remotos del modelo de celda. Este resultado indica que el máximo valor de la tensión remota se alcanza para valores de V/V_0 bastante pequeños, mientras que los huecos continúan creciendo cuando los niveles de tensión macroscópica comienzan a decrecer.

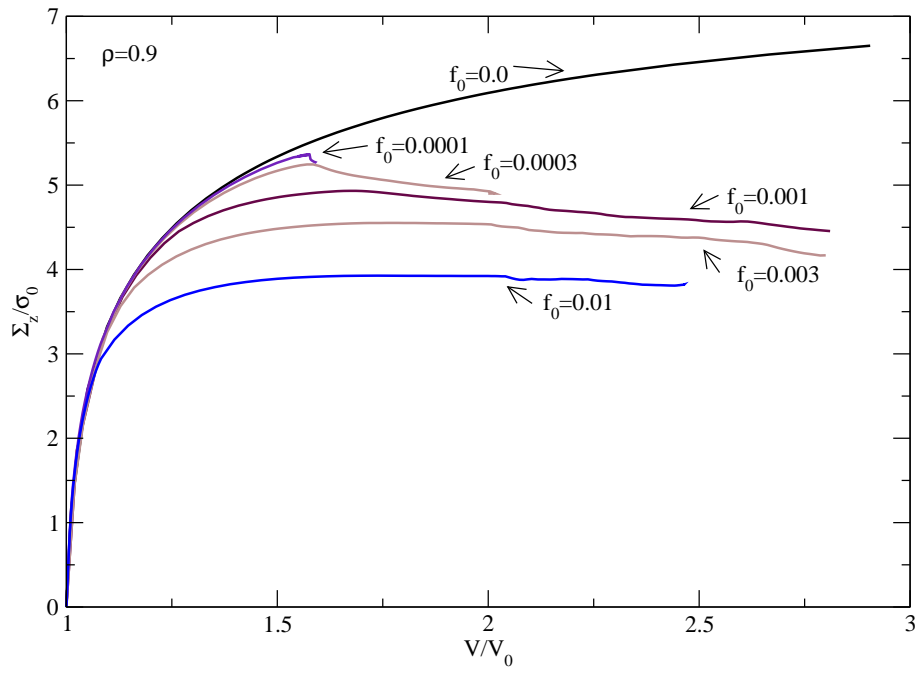


Figura 5.12: Influencia de f_0 para $\rho = 0,9$ y $N = 0,2$ sin nucleación.

Capítulo 6

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

6.1. Conclusiones

Se recoge a continuación los principales resultados y conclusiones que se derivan de esta tesis:

- Se ha propuesto un algoritmo de integración de las ecuaciones constitutivas de materiales de Gurson aplicable a problemas termoviscoplasticos, en las que se debe considerar la influencia de la velocidad de deformación y la temperatura. En particular se ha desarrollado para el caso de condiciones adiabáticas, presentes en problemas de impacto de elementos estructurales. El algoritmo resultante es implícito en todas las variables y preserva la condición de consistencia.
- También se ha construido el operador tangente consistente con el algoritmo de integración utilizado, el cual es muy importante para reducir el coste computacional asociado a la resolución de este tipo de problemas cuando el algoritmo de integración se implementa en códigos implícitos de elementos finitos.
- Este algoritmo se ha implementado en un código comercial de elementos finitos, tanto en su versión implícita (*ABAQUS/Standard*) como en su versión explícita (*ABAQUS/Explicit*), y se ha validado con resultados experimentales de ensayos de impacto sobre cilindros de Taylor existentes en la bibliografía.
- Se ha formulado e implementado numéricamente una modificación al modelo GTN

en el que se considera que algunos parámetros del modelo no son constantes, sino que dependen del estado tensional. Se ha implementado un algoritmo de integración de las ecuaciones constitutivas asociadas a dicho modelo en el mismo código que en el caso anterior y se ha validado, tanto con resultados numéricos basados en celdas unitarias, como con resultados experimentales de ensayos de tracción estática. En este caso se ha aplicado a problemas estáticos, aunque es sencilla la extensión a problemas termoviscoplasticos.

- Se ha propuesto un método para implementar condiciones de contorno que impliquen variación de la triaxialidad durante el proceso de carga (estados de carga no proporcionales) en análisis asociados a celdas unitarias.
- Se ha analizado la influencia de la porosidad en las inestabilidades de cavitación en metales dúctiles y se ha puesto de manifiesto que la presencia de una porosidad inicial inhibe la aparición de las inestabilidades de cavitación, puesto que el crecimiento de la porosidad reduce las tensiones máximas alcanzables.

6.2. Trabajo futuro

Algunas de las líneas que se pueden abordar como continuación de esta tesis son las siguientes:

- Extender el algoritmo desarrollado para problemas termoviscoplasticos a condiciones no adiabáticas.
- Formular algoritmos consistentes para integrar las ecuaciones constitutivas de otros modelos aplicables a fractura dúctil como el de Golaganu, considerando los efectos de la velocidad de deformación y la temperatura.
- También se puede estudiar la utilización de este tipo de algoritmos de integración aplicados a modelos que consideran formulaciones no locales para el daño o en situaciones más generales basadas en teorías de la plasticidad con gradientes de deformaciones.
- Se debe sistematizar el estudio sobre la dependencia de los parámetros del modelo de Gurson con el campo tensional, incluyendo no sólo la triaxialidad, sino también el parámetro de Lode. También debe validarse este algoritmo con otros ensayos con

variación de triaxialidad más acusada, como ensayos sobre probetas fisuradas, por ejemplo, así como en casos de carga no proporcionales

- Análisis de problemas de cavitación considerando porosidad inicial, así como los efectos de la velocidad de deformación y la temperatura.

Bibliografía

- [1] Molinari, A., Musquar, C., Sutter, G., Adiabatic shear banding in high speed machining of Ti 6Al-4V: Experiments and modeling, *International Journal of Plasticity* 18 (2002) 443–459.
- [2] Rojek, J., Zinkiewicz, O.C., Oñate, E., Postek, E., Advances in FE explicit formulation for simulation of metal forming processes, *Journal of Materials Processing Technology* 119 (2001) 41–47.
- [3] Bäker, M., Rösler, J., Siemers, C., A finite element model of high speed metal cutting with adiabatic shearing, *Computers and Structures* 80 (2002) 495–513.
- [4] Reyes, A., Langseth, M., Hopperstad, O.S., Crashworthiness of aluminum extrusions subjected to oblique loading: experiments and numerical analyses, *International Journal of Mechanical Sciences* 44 (2002) 1965–1984.
- [5] Chabanet, O., Steglich, D., Besson, J., Heitmann, V., Hellmann, D., Brocks, W., Predicting crack growth resistance of aluminium sheets, *Computational Materials Science* 26 (2003) 1–12.
- [6] Weck, A., The role of coalescence on ductile fracture, McMaster University, Ontario, (Canadá), <http://mse.mcmaster.ca/graduate/courses/702/index.html>, 2005.
- [7] Van-Stone, R., Cox, T., Low, J., Psioda, J., Microstructural aspects of fracture by dimpled rupture, *International Metals Reviews* 30 (1985) 157–159.
- [8] Tipper, C.F., The fracture of metals, *Metallurgia* 39 (1949) 133–137.
- [9] Puttick, K.E., Ductile fracture in metals, *Philosophical Magazine* 4 (1959) 964–969.
- [10] Rogers, H.C., The tensile fracture of ductile metals, *Transactions of the ASME* (1960) 498–506.

- [11] Bridgman, P.W., Studies in large plastic flow and fracture, McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
- [12] Goods, S.H., Brown, L.M., The nucleation of cavities by plastic deformation, *Acta Metallurgica* 27 (1979) 1–15.
- [13] Argon, A.S., Im, J., Needleman, A., Distribution of plastic strain and negative pressure in necked steel and copper bars, *Metallurgical Transaction* 6A (1975) 815–824.
- [14] Argon, A.S., Im, J., Saflogu, R., Cavity formation from inclusions in ductile fracture, *Metallurgical Transaction* 6A (1975) 825–837.
- [15] Beremin, F.M., Cavity formation from inclusions in ductile fracture of a 508 steel, *Metallurgical Transaction* 12A (1981) 723–731.
- [16] Lloyd, J.D., Aspects of fracture in particulate reinforced metal matrix composites, *Acta Metallurgica et Materialia* 39 (1991) 59–71.
- [17] S. Needleman, A., Nutt, S.R., Tvergaard, V., Matrix, reinforced and interfacial failure, en: *Fundamentals of metal matrix composites*. Editores: Suresh, S., Mortensen, A. y Needleman, A., Butterworth-Heinemann, Stonehan, 1993, pp. 233–250.
- [18] Shabrov, M.N., Sylven, E., Kim, S., Sherman, D.H., Chuzhoy, L., Briant, C.L., Needleman, A., Void nucleation by inclusion cracking, *Metallurgical and Materials Transactions A* 35A (2004) 1745–1755.
- [19] Chu, C.C., Needleman, A., Void nucleation effects in biaxially stretched sheets, *Journal of Engineering Materials and Technology* 102 (1980) 249–256.
- [20] Hancock, J.W., Mackenzie, A.C., On the mechanisms of ductile failure in high strength steel subjected to multi-axial stress- states, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 24 (1976) 147–169.
- [21] LeRoy, G., Embury, J.D., Edwards, G., Ashby, M.F., A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids, *Acta Metallurgica* 29 (1981) 1509–1522.
- [22] McClintock, F.A., A criterion of ductile fracture by the growth of holes, *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968) 363–371.
- [23] Rice, J.R., Tracey, D.M., On the ductile enlargements of voids in triaxial stress fields, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 17 (1969) 201–217.

- [24] Thomason, P.F., Ductile fracture of metals, Pergamon Press, Oxford, 1990.
- [25] Pardoën, T., Hutchinson, J.W., An extended model for void growth and coalescence, *International Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000) 2467–2512.
- [26] Gurson, A.L., Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth. Part I- Yield criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media, *Journal of Engineering Materials and Technology* 99 (1977) 2–15.
- [27] Tvergaard, V., Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions, *International Journal of Fracture* 17 (1981) 389–407.
- [28] Tvergaard, V., On localization in ductile materials containing spherical voids, *International Journal of Fracture* 18 (1982) 237–252.
- [29] Tvergaard, V., Needleman, A., Analysis of cup-cone fracture in a round tensile bar, *Acta Metallurgica* 32 (1984) 157–169.
- [30] Zhang, Z.L., A complete Gurson Model in: M.H. Aliabadi. *Nonlinear Fracture and Damage Mechanics*, WIT, Southampton, 2001, M.H. Aliabadi, 2001, pp. 223–248.
- [31] Zhang, Z.L., Thaulow, C., Ødegård, J., A complete Gurson model approach for ductile fracture, *Engineering Fracture Mechanics* 67 (2000) 155–168.
- [32] Peñuelas Sánchez, I., Influencia de la constricción en el comportamiento a fractura de uniones soldadas, Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo (2005).
- [33] Faleskog, J., Gao, X., Shih, C.F., Cell model for nonlinear fracture analysis I. Micromechanics calibration, *International Journal of Fracture* 89(4) (1998) 355–373.
- [34] Zhang, K.S., Bai, J.B., Francois, D., Numerical analysis of the influence of the Lode parameter on the void growth, *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001) 5847–5856.
- [35] Kim, J., Gao, X., Srivatsan, S., Modeling of void growth in ductile solids: effects of stress triaxiality and initial porosity, *Engineering Fracture Mechanics* 71 (2004) 379–400.
- [36] Pan, J., Saje, M., Needleman, A., Localization of deformation in rate sensitive porous plastic solids, *International Journal of Fracture* 21 (1983) 261–278.

- [37] Pierce D., Shih C.F., Needleman A., A tangent modulus method for rate dependent solids, *Computers & Structures* 18 (1984) 875–887.
- [38] Tvergaard, V., Needleman, A., Effect of material sensitivity on failure modes in the Charpy V-Notch test, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 34 (1986) 213–241.
- [39] Worswick, M.J., Pick, R.J., Void growth and coalescence during high velocity impact, *Mechanics of Materials* 19 (1995) 293–309.
- [40] Worswick, M.J., Pelletier, P., Numerical simulation of ductile fracture during high strain rate deformation, *The European Physical Journal AP* 4 (1998) 257–267.
- [41] Becker, R., Ring fragmentation predictions using the Gurson model with material stability conditions as failure criteria, *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002) 3555–3580.
- [42] Børvik, T., Hopperstad, O.S., Berstad, T., On the influence of stress triaxiality and strain rate on the behaviour of a structural steel. Part II. Numerical study, *European Journal of Mechanics A/Solids* 22 (2003) 15–32.
- [43] Betegón, C., del Coz, J.J., Peñuelas, I., Implicit integration procedure for viscoplastic gurson materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006) 6146–6157.
- [44] Srikanth A., Zabaras N., A computational model for the finite element analysis of thermoplasticity coupled with ductile damage at finite strains, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45 (1999) 1569–1605.
- [45] Koppenhoefer, K.C., Dodds, R.H., Ductile crack growth in pre-cracked CVN specimens: numerical studies, *Nuclear Engineering and Design* 180 (1998) 221–241.
- [46] Eberle, A., Klingbeil, D., Schicker, J., The calculation of dynamic JR-curves from the finite element analysis of a charpy test using a rate-dependent damage model, *Nuclear Engineering and Design* 198 (2000) 75–87.
- [47] Needleman, A., Tvergaard, V., A numerical study of void distribution effects on dynamic, ductile crack growth, *Engineering Fracture Mechanics* 38 (1991) 157–173.
- [48] Tvergaard, V., Needleman, A., Analysis of the Charpy V-notch test for welds, *Engineering Fracture Mechanics* 65 (2000) 627–643.

- [49] Hao, S., Brocks, W., The Gurson-Tvergaard-Needleman model for rate and temperature-dependent materials with isotropic and kinematic hardening, *Computational Mechanics* 20 (1997) 34–40.
- [50] Gologanu, M., Leblond, J.B., Perrin, G., Devaux, J., Theoretical models for void coalescence in porous ductile solids. I coalescence "in layers", *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001) 5581–5594.
- [51] Gologanu, M., Leblond, J.B., Devaux, J., Theoretical models for void coalescence in porous ductile solids. II coalescence "in columns", *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001) 5595–5604.
- [52] Leblond, J.B., Perrin, G., Devaux, J., Bifurcations effects in ductile materials with damage localization, *Journal of Applied Mechanics* 61 (1994) 236–242.
- [53] Tvergaard, V., Needleman, A., Effects of non-local damage in porous plastic solids, *International Journal of Solids and Structures* 32 (1995) 1063–1077.
- [54] Ramaswamy, S., Aravas, N., Finite element implementation of gradient plasticity models, part II: Gradient-dependent evolutions equations, *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering* 163 (1998) 33–53.
- [55] Reusch, F., Svendsen, B., Klingbeil, D., A non-local approach of Gurson-based ductile damage modeling, *Computational Materials Science* 26 (2003) 219–229.
- [56] Kachanov, L.M., Time of the rupture process under creep conditions, *Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Otd. Tekh. Nauk* 8 26–32.
- [57] Rabotnov, Y.N., *Creep problems in structural members*, North-Holland, Amsterdam, 1969.
- [58] Lemaitre, J., Evaluation of dissipation and damage in metals submitted to dynamic loading, en: *Proceedings of ICM1, Kyoto, Japón, 1971*.
- [59] Lemaitre, J. , Chaboche, J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1985.
- [60] Rousselier, G., Ductile fracture models and their potencial in local approach of fracture, *Nuclear Engineering and Design* 105 (1987) 97–111.
- [61] Rousselier, G., Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage, *Three Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture*, editado por Nemat-Nasser. Nort Holland, Amsterdam (1987) 331–355.

- [62] Burstow, M.C., Howard, I.C., Predicting the effects of crack tip constraint on material resistance curves using ductile damage theory, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 19 (1996) 461–474.
- [63] Tanguy, B., Besson, J., An extension of the Rousselier model to viscoplastic temperature dependent materials, *International Journal of Fracture* 116 (2002) 81–101.
- [64] Besson, J., Steglich, D., Brocks, W., Modeling of crack growth in round bars and plane strain specimens, *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001) 8259–8284.
- [65] Bishop, R.F., Hill, R., Mott, N.F., The theory of indentation and hardness tests, *Proceeding of the Physical Society* 57 (1945) 147–159.
- [66] Ball, J.M., Discontinuous equilibrium solutions and cavitation in nonlinear elasticity, *Philosophical Transaction of Royal Society of London A* 306 (1982) 557–610.
- [67] Horgan, C.O., Abeyaratne, R., A bifurcation problem for a compressible nonlinearly elastic medium: growth of a micro-void, *Journal of Elasticity* 16 (1986) 189–200.
- [68] Horgan, C.O., Polignone, D.A., Cavitation in nonlinearly elastic solids: A review, *Applied Mechanics Review* 48 (1995) 471–485.
- [69] Chun, D.T., Horgan, C.O., Abeyaratne, R., A note on a bifurcation problem in finite plasticity related to void nucleation, *International Journal of Solids and Structures* 23 (1987) 983–988.
- [70] Ortiz, M., Molinari, A., Effect of strain hardening and rate sensitivity on the dynamic growth of a void in a plastic material, *Journal of Applied Mechanics* 59 (1992) 48–53.
- [71] Wu, X.Y., Ramesh, K.T., Wright, T.W., The dynamic growth of a single void in a viscoplastic material under transient hydrostatic loading, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51 (2003) 1–26.
- [72] Kennedy, T.C., Puttapitukporn, T., Kassner, M.E., Dynamic effects on cavitation instabilities in solids, *Acta Mechanica* 165 (2003) 73–85.
- [73] Huang, Y., Hutchinson, J.W., Tvergaard, V., Cavitation instabilities in elastic-plastic solids, *International Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39 (1991) 223–241.

- [74] Tvergaard, V., Huang, Y., Hutchinson, J.W., Cavitation instabilities in a power hardening elastic-plastic solids, *European Journal of Mechanics* 2 (1992) 215–231.
- [75] Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley and Sons, LTD, England, 2000.
- [76] Doghri, I., *Mechanics of Deformable Solids, Linear and Nonlinear, Analytical and Computational Aspects*, Springer, Berlin, 2000.
- [77] Lee, E.H., Elastic plastic deformation at finite strains, *Journal of Applied Mechanics* 36 (1969) 1–6.
- [78] Wilkins, M. L., Calculation of elastic-plastic flow, *Met Comp Phys* 3 (1964) 211–262.
- [79] Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto/visco-plastic finite element analysis, *Computers and Structures* 8 (1978) 169–173.
- [80] Golinval, J., *Calculs par Éléments finis de structures élastoviscoplastiques soumises à des chargements cycliques á haute température*, Tesis Doctoral, University of Liège, Bélgica (1988).
- [81] Bruhns, O., Rott, U., A viscoplastic model with a smooth transition to describe rate-independent plasticity, *International Journal of Plasticity* 10 (4) (1994) 347–362.
- [82] Pan, W., Endochronic simulation for finite viscoplastic deformation, *International Journal of Plasticity* 13 (6-7) (1997) 347–362.
- [83] Zaera, R., Fernandez-Saez, J., An implicit consistent algorithm for the integration of thermoviscoplastic constitutive equations in adiabatic conditions and finite deformations, *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006) 1594–1612.
- [84] Fernández Fernández, D., *Desarrollo de una nueva herramienta basada en redes neuronales para el diseño de protecciones ligeras cerámica-metal frente a impacto de alta velocidad*, Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid (2007).
- [85] Simo, J., Hughes, T., *Computational Inelasticity*, Springer, Nueva York, 1998.
- [86] Hagege, B., *Simulation du comportement mécanique des milieux fibreux en grandes transformations: application aux renforts tricotés*, Tesis Doctoral, ENSAM, Paris (2004).

- [87] Aravas, N., On the numerical integration of a class of pressure dependant plasticity models, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987) 1395–1416.
- [88] Flores Le Roux, R., Estudio de la propagación de fisuras en materiales dúctiles, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid (2002).
- [89] HKS, ABAQUS/Standard v6.5 User's Manual, ABAQUS Inc., Richmond, USA, 2004.
- [90] HKS, ABAQUS/Explicit v6.5 User's Manual, ABAQUS Inc., Richmond, USA, 2004.
- [91] Johnson, G. R., Cook, W. H., A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates, and temperatures, en: *Proc. 7th Int. Symp. Ballistics*, The Hague, The Netherlands, 1983, pp. 1–7.
- [92] House, J.W., Taylor impact testing, Estudio Técnico AFATL-TR-89-41, Air Force Armament Laboratory, Eglin AFB, FL (1989).
- [93] Tvergaard, V., On localization in ductile materials containing spherical voids, *International Journal of Fracture* 18 (1982) 237–252.
- [94] Koplik, J., Needleman, A., Void growth and coalescence in porous plastic solids, *International Journal of Solids and Structures* 24 (1988) 835–53.
- [95] Brocks, W., Sun, D.Z., Honig, A., Verification of the transferability of micromechanical parameters by cell model calculation with visco-plastic materials, *International Journal of Plasticity* 11 (1995) 971–89.
- [96] Gao, X., Faleskog, J., Shih, C.F., Cell model for nonlinear fracture analysis II, *International Journal of Fracture* 89 (1998) 375–98.
- [97] Lin, R.C., Steglich, D., Wrocks, W., Performing RVE calculations under constant stress triaxiality for monotonous an cyclic loading, *International Journal for numerical methods in engineering* 66 (2006) 1331–1360.
- [98] Muhlich, U., Brocks, W., On the numerical integration of a class of pressure-dependent platicity models including kinematic hardening, *Computational Mechanics* 31 (2003) 479–488.
- [99] Hill R., The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 15 (1967) 79–95.

- [100] Flinn, B., Rhule, M., Evans, A.G., Toughening in composites of Al_2O_3 reinforced with Al , University of California, Santa Barbara, 1989.
- [101] Ashby, M.F., Blunt, F.J., Bannister, M., Flow characteristic of highly constrained metal wires, *Acta Metallurgica* 37 (1989) 1847–1857.
- [102] Tvergaard, V., Effect of residual stress on cavitation instabilities in constrained metal wires, *Journal of Applied Mechanics* 71 (2004) 560–566.
- [103] Dalglish, B.J., Trumble, K.P., Evans, A.G., The strength and fracture of alumina bonded with aluminum alloys, *Acta Metallurgica* 37 (1989) 1923–1931.
- [104] Tvergaard, V., Interface failure by cavity growth to coalescence, *International Journal of Mechanical Sciences* 42 (2000) 381–395.
- [105] Tvergaard, V., Studies of void growth in a thin ductile layer between ceramics, *Computational Mechanics* 20 (1997) 186–191.
- [106] Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., *Strain gradient plasticity*, Academic Press, New York, 1997.
- [107] Stölken, J.S., Evans, A., A microbend test method for measuring the plasticity length scale, *Acta Materialia* 46 (1998) 5109–5115.
- [108] Niordson, C.F., Tvergaard, V., Size-effects on cavitation instabilities, Estudio técnico, Department of Mechanical Engineering, Solid Mechanics, Technical University of Denmark (2005).
- [109] Tvergaard, V., Interaction of very small voids with larger voids, *International Journal of Solids Structures* 35 (1998) 3949–4000.
- [110] Tvergaard, V., Niordson, C.F., Nonlocal plasticity effects on interaction of different size voids, *International Journal of Plasticity* 20 (2004) 107–120.
- [111] Tvergaard, V., Material failure by void growth to coalescence, *Advances in Applied Mechanics* 27 (1990) 83–151:107–120.
- [112] Tandon, G.P., Weng, G.J., A theory of particle-reinforced plasticity, *Journal of Applied Mechanics* 55 (1988) 126–135.
- [113] Fleck, N.A., Otoyoy, H., Needleman, A., Indentation of porous solids, *International Journal of Solids Structures* 29 (1992) 1613–1636.

- [114] Tvergaard, V., Effect of thickness inhomogeneities in internally pressurized elastic-plastic spherical shells, *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 24 (1976) 291–304.

ANEXO 1: Operaciones con tensores

Los tensores de segundo y cuarto orden se representarán **en negrita** y con letras en minúsculas (segundo orden) y mayúsculas (cuarto orden).

Las operaciones tensoriales necesarias para la formulación e integración del modelo se describen a continuación:

- El símbolo " \cdot " indica el producto contraído entre dos tensores de segundo orden

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})_{ij} = \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{kj}$$

- El símbolo " $:$ " indica el producto de un tensor de cuarto orden con uno de segundo orden:

$$(\mathbf{C} : \mathbf{a})_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{a}_{lk}$$

- o el producto de dos tensores de cuarto orden:

$$(\mathbf{C} : \mathbf{D})_{ijkl} = \mathbf{C}_{ijmn} \mathbf{D}_{nmkl} \quad (6.1)$$

- El producto tensorial diádico \otimes entre dos tensores de segundo orden dá como resultado un tensor de cuarto orden con la relación de subíndices:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ijkl} = \mathbf{a}_{ij} \mathbf{b}_{kl}$$

Un tensor de segundo orden \mathbf{u} se puede descomponer en suma directa de su parte hidrostática y su parte desviadora

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{hyd} + \mathbf{u}^{dev}$$

La parte hidrostática \mathbf{u}_{hyd} se define como:

$$\mathbf{u}_{hyd} = \frac{\text{traza}(\mathbf{u})}{3} \mathbf{1}$$

Donde $traza(\mathbf{u})$ se calcula mediante el producto:

$$traza(\mathbf{u}) = \mathbf{u} : \mathbf{1}$$

con $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de segundo orden

$$(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}$$

La parte desviadora \mathbf{u}^{dev} se obtiene mediante el producto:

$$\mathbf{u}^{dev} = \mathbf{I}^{dev} : \mathbf{u}$$

\mathbf{I}^{dev} es el tensor desviador de cuarto orden definido como

$$\mathbf{I}^{dev} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

con \mathbf{I} es el tensor identidad de cuarto orden:

$$(\mathbf{I})_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Ambas partes, hidrostática y desviadora, pertenecen a subespacios tensoriales ortogonales entre sí respecto del producto doble contraído, de tal forma que:

$$\mathbf{u}^{hyd} : \mathbf{u}^{dev} = 0$$

ANEXO 2: Modelo de Gurson para problemas termo-viscoplásticos. Resolución del sistema de ecuaciones linealizadas

Leyes de evolución de las variables de estado

Si la variación en cada iteración $\delta^{(s)}$ de las variables de estado $\rho, \theta, f, \bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p$ se escribe de la forma indicada en 3.97:

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta\rho^{(s)} &= h_{10}^{(s)} + h_{11}^{(s)}\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} + h_{12}^{(s)}\delta\Delta\varepsilon_q^{(s)} \\ \text{b) } \delta\theta^{(s)} &= h_{20}^{(s)} + h_{21}^{(s)}\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} + h_{22}^{(s)}\delta\Delta\varepsilon_q^{(s)} \\ \text{c) } \delta f^{(s)} &= h_{30}^{(s)} + h_{31}^{(s)}\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} + h_{32}^{(s)}\delta\Delta\varepsilon_q^{(s)} \\ \text{d) } \delta\bar{\varepsilon}^p{}^{(s)} &= h_{40}^{(s)} + h_{41}^{(s)}\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} + h_{42}^{(s)}\delta\Delta\varepsilon_q^{(s)} \\ \text{e) } \delta\dot{\bar{\varepsilon}}^p{}^{(s)} &= h_{50}^{(s)} + h_{51}^{(s)}\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} + h_{52}^{(s)}\delta\Delta\varepsilon_q^{(s)} \end{aligned}$$

El valor que toman los coeficientes $h_{\alpha j}^{(s)}$ de (6.2) son de la forma:

- a) Linealización de la relación incremental de la variación de la densidad

$$\Delta\rho + \rho\Delta\varepsilon : \mathbf{1} = 0$$

Sea $g_1^{(s)}$ el valor de la ecuación (6.2) en el estado de iteración (s) :

$$g_1^{(s)} = \rho^{(s)} (1 + \Delta\varepsilon : \mathbf{1}) - \rho_t$$

La linealización por Newton-Raphson de la ecuación (6.2) da como resultado:

$$-g_1^{(s)} = \delta\rho^{(s)} (1 + \Delta\varepsilon : \mathbf{1})$$

Por lo que el valor de $\delta\rho^{(s)}$ queda igual a:

$$\delta\rho^{(s)} = \frac{-g_1^{(s)}}{(1 + \Delta\epsilon : \mathbf{1})}$$

Tomando $h_{10}^{(s)}$, $h_{11}^{(s)}$ y $h_{12}^{(s)}$ de (6.2) los valores:

$$h_{10}^{(s)} = \frac{-g_1^{(s)}}{(1 + \Delta\epsilon : \mathbf{1})} \quad h_{11}^{(s)} = 0 \quad h_{12}^{(s)} = 0$$

con $\Delta\epsilon : \mathbf{1}$ conocido en cada incremento de tiempo Δt .

• **b) Variación de la temperatura debido a disipación plástica**

Procediendo de igual forma con la ecuación $\rho C_p \Delta\theta - X (q \Delta\epsilon_q - p \Delta\epsilon_p) = 0$ y definiendo la función:

$$g_2^{(s)} = \rho^{(s)} C_p (\theta^{(s)} - \theta_t) - X (q^{(s)} \Delta\epsilon_q^{(s)} - p^{(s)} \Delta\epsilon_p^{(s)})$$

y considerando el valor de C_p constante, la ecuación linealizada para la variación de temperatura toma la forma:

$$\begin{aligned} -g_2^{(s)} &= \rho^{(s)} C_p \delta\theta^{(s)} + \delta\rho^{(s)} C_p (\theta^{(s)} - \theta_t) - \\ &- X (\delta q^{(s)} \Delta\epsilon_q^{(s)} + q^{(s)} \delta\Delta\epsilon_q^{(s)} - \delta p^{(s)} \Delta\epsilon_p^{(s)} - p^{(s)} \delta\Delta\epsilon_p^{(s)}) \end{aligned}$$

Entrando en 6.2 con 6.2 y 3.96:

$$\begin{aligned} -g_2^{(s)} &= \rho^{(s)} C_p \delta\theta^{(s)} + h_{10}^{(s)} C_p (\theta^{(s)} - \theta_t) + X (p^{(s)} + K \Delta\epsilon_p^{(s)}) \delta\Delta\epsilon_p^{(s)} - \\ &- X (q^{(s)} - 3G \Delta\epsilon_q^{(s)}) \delta\Delta\epsilon_q^{(s)} + 3X \alpha K \Delta\epsilon_p^{(s)} \delta\theta^{(s)} \end{aligned}$$

Por tanto $\delta\theta^{(s)}$ queda igual a:

$$\begin{aligned} \delta\theta^{(s)} &= -\frac{g_2^{(s)} + h_{10}^{(s)} C_p (\theta^{(s)} - \theta_t)}{3X \alpha K \Delta\epsilon_p^{(s)} + \rho^{(s)} C_p} - \frac{X (p^{(s)} + K \Delta\epsilon_p^{(s)})}{3X \alpha K \Delta\epsilon_p^{(s)} + \rho^{(s)} C_p} \delta\Delta\epsilon_p^{(s)} + \\ &+ \frac{X (q^{(s)} - 3G \Delta\epsilon_q^{(s)})}{3X \alpha K \Delta\epsilon_p^{(s)} + \rho^{(s)} C_p} \delta\Delta\epsilon_q^{(s)} \end{aligned}$$

Siendo $h_{20}^{(s)}$, $h_{21}^{(s)}$ y $h_{22}^{(s)}$:

$$\begin{aligned} h_{20}^{(s)} &= -\frac{g_2^{(s)} + h_{10}^{(s)} C_p (\theta^{(s)} - \theta_t)}{3X \alpha K \Delta\epsilon_p^{(s)} + \rho^{(s)} C_p} & h_{21}^{(s)} &= -\frac{X (p^{(s)} + K \Delta\epsilon_p^{(s)})}{3X \alpha K \Delta\epsilon_p^{(s)} + \rho^{(s)} C_p} \\ h_{22}^{(s)} &= \frac{X (q^{(s)} - 3G \Delta\epsilon_q^{(s)})}{3X \alpha K \Delta\epsilon_p^{(s)} + \rho^{(s)} C_p} \end{aligned}$$

- c) Evolución de f por nucleación y crecimiento

Suponiendo A y B valores prácticamente constantes, y linealizando la ecuación:

$$\Delta f - (1 - f)\Delta\varepsilon_p - A\Delta\bar{\varepsilon}^p - B(\Delta\bar{\sigma} - \Delta p) = 0$$

Sea $g_3^{(s)}$ igual a:

$$g_3^{(s)} = (f^{(s)} - f_t) - (1 - f^{(s)})\Delta\varepsilon_p^{(s)} - A(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) - B[(\bar{\sigma}^{(s)} - \bar{\sigma}_t) - (p^{(s)} - p_t)]$$

se obtiene, utilizando Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} -g_3^{(s)} = & (1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)})\delta f^{(s)} - (1 - f^{(s)})\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} - A\delta\bar{\varepsilon}^{p(s)} - B\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\bigg|_s \delta\bar{\varepsilon}^{p(s)} \right. \\ & \left. + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\bigg|_s \delta\bar{\varepsilon}^{p(s)} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta}\bigg|_s \delta\theta^{(s)}\right) - B(K\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} + 3\alpha K\delta\theta^{(s)}) \end{aligned}$$

Agrupando términos, $\delta f^{(s)}$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \delta f^{(s)} = & \frac{-g_3^{(s)}}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} + \frac{1 - f^{(s)} + BK}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}}\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} + \frac{A + B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\big|_s}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}}\delta\bar{\varepsilon}^{p(s)} + \\ & \frac{B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\big|_s}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}}\delta\bar{\varepsilon}^{p(s)} + \frac{B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial T}\big|_s + 3\alpha K}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}}\delta\theta^{(s)} \end{aligned}$$

- d) Variación de $\bar{\varepsilon}^p$

Se define $g_4^{(s)}$ como el valor de la ecuación $\dot{\bar{\varepsilon}}^p\Delta t - \Delta\bar{\varepsilon}^p$ en el estado de iteración (s) :

$$g_4^{(s)} = (\dot{\bar{\varepsilon}}^{p(s)}\Delta t - \Delta\bar{\varepsilon}^{p(s)})$$

con Δt conocida. La linealización de la variación de $\bar{\varepsilon}^p$ en (s) queda igual a:

$$-g_4^{(s)} = \Delta t\delta\dot{\bar{\varepsilon}}^{p(s)} - \delta\bar{\varepsilon}^{p(s)}$$

y $\delta\dot{\bar{\varepsilon}}^{p(s)}$ se puede escribir, en función de $\delta\bar{\varepsilon}^{p(s)}$, como:

$$\delta\dot{\bar{\varepsilon}}^{p(s)} = \frac{-g_4^{(s)}}{\Delta t} + \frac{\delta\bar{\varepsilon}^{p(s)}}{\Delta t}$$

- e) Equivalencia del trabajo plástico

Sea $g_5^{(s)}$:

$$g_5^{(s)} = (1 - f^{(s)})(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p)\bar{\sigma}^{(s)} - q^{(s)}\Delta\varepsilon_q^{(s)} + p^{(s)}\Delta\varepsilon_p^{(s)}$$

La linealización por Newton-Raphson de la ecuación $(1-f)\Delta\bar{\varepsilon}^p\bar{\sigma}-q\Delta\varepsilon_q+p\Delta\varepsilon_p=0$ da como resultado:

$$\begin{aligned} -g_5^{(s)} = & \left[(1-f^{(s)})\bar{\sigma}^{(s)} + (1-f^{(s)})(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)} \right] \delta\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\sigma}^{(s)}(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \\ & -\bar{\varepsilon}_t^p) \delta f^{(s)} + (3G\Delta\varepsilon_q^{(s)} - q^{(s)}) \delta\Delta\varepsilon_q^{(s)} + (p^{(s)} + K\Delta\varepsilon_p^{(s)}) \delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} + \\ & + (1-f^{(s)})(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} \Big|_s \delta\dot{\bar{\varepsilon}}^{p(s)} + \left[(1-f^{(s)})(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial T} \Big|_s + 3\alpha K\Delta\varepsilon_p^{(s)} \right] \delta\theta^{(s)} \end{aligned}$$

Entrando en la ecuación anterior con 6.2, 6.2 y 6.2 y operando, los términos $h_{40}^{(s)}$, $h_{41}^{(s)}$ y $h_{42}^{(s)}$ de $\delta\bar{\varepsilon}^{p(s)}$ en la ecuación (6.2) tienen la forma:

$$\begin{aligned} DEN = & (1-f^{(s)})\bar{\sigma}^{(s)} + (1-f^{(s)})(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)} - \bar{\sigma}^{(s)}(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \left[\frac{A + B \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)}}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} + \right. \\ & \left. \frac{B \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)}}{(1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}) \Delta t} \right] + (1-f^{(s)})(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} \Big|_s \frac{1}{\Delta t} \\ h_{40}^{(s)} = & \frac{1}{DEN} \left[-g_5^{(s)} - \bar{\sigma}^{(s)}(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{g_3^{(s)}}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} - \frac{\bar{\sigma}^{(s)}(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) B \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} \Big|_s g_4^{(s)}}{(1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}) \Delta t} \right. \\ & + (1-f^{(s)})(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} \Big|_s \frac{g_4^{(s)}}{\Delta t} + \bar{\sigma}^{(s)}(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{B \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} \Big|_s + 3\alpha K}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{20}^{(s)} - \\ & \left. - \left((1-f^{(s)})(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \Big|_s + 3\alpha K\Delta\varepsilon_p^{(s)} \right) h_{20}^{(s)} \right] \\ h_{41}^{(s)} = & \frac{1}{DEN} \left[\bar{\sigma}^{(s)}(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \left(\frac{1-f^{(s)} + BK}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} + \frac{B \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \Big|_s + 3\alpha K}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{21}^{(s)} \right) - \right. \\ & \left. - (p^{(s)} + K\Delta\varepsilon_p^{(s)}) - \left((1-f^{(s)})(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \Big|_s + 3\alpha K\Delta\varepsilon_p^{(s)} \right) h_{21}^{(s)} \right] \\ h_{42}^{(s)} = & \frac{1}{DEN} \left[\bar{\sigma}^{(s)}(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{B \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \Big|_s + 3\alpha K}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{22}^{(s)} - (3G\Delta\varepsilon_q^{(s)} - q^{(s)}) - \right. \\ & \left. - \left((1-f^{(s)})(\bar{\varepsilon}^{p(s)} - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \Big|_s + 3\alpha K\Delta\varepsilon_p^{(s)} \right) h_{22}^{(s)} \right] \end{aligned}$$

A partir de estos valores , los parámetros $h_{50}^{(s)}$, $h_{51}^{(s)}$ y $h_{52}^{(s)}$ toman la expresión:

$$h_{50}^{(s)} = \frac{-g_4^{(s)}}{\Delta t} + \frac{h_{40}^{(s)}}{\Delta t} \quad h_{51}^{(s)} = \frac{h_{41}^{(s)}}{\Delta t} \quad h_{52}^{(s)} = \frac{h_{42}^{(s)}}{\Delta t}$$

y los parámetros $h_{30}^{(s)}$, $h_{31}^{(s)}$ y $h_{32}^{(s)}$ de $\delta f^{(s)}$:

$$\begin{aligned} h_{30}^{(s)} &= \frac{-g_3^{(s)}}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} + \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T}|_s + 3\alpha K}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{20}^{(s)} + \frac{A + B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p}|_s}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{40}^{(s)} + \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p}|_s}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{50}^{(s)} \\ h_{31}^{(s)} &= \frac{1 - f^{(s)} + BK}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} + \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T}|_s + 3\alpha K}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{21}^{(s)} + \frac{A + B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p}|_s}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{41}^{(s)} + \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p}|_s}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{51}^{(s)} \\ h_{32}^{(s)} &= \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T}|_s + 3\alpha K}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{22}^{(s)} + \frac{A + B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p}|_s}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{42}^{(s)} + \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p}|_s}{1 + \Delta\varepsilon_p^{(s)}} h_{52}^{(s)} \end{aligned}$$

Una vez obtenidos los valores de $\delta^{(s)}$ de las variables de estado (6.2) en función de $\delta\Delta\varepsilon_p$ y $\delta\Delta\varepsilon_q$, éstas y el resto de incógnitas del problema quedarán completamente definidas al linealizar y resolver las ecuaciones (3.93) y (3.95). Así:

Sea k la expresión que relaciona los valores de $\Delta\varepsilon_p$ y $\Delta\varepsilon_q$ en (3.98):

$$k(\Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_q, f, \bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \theta) \equiv \Delta\varepsilon_p \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \Delta\varepsilon_q \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

Aplicando el método de Newton-Raphson para linealizarla, se cumple que:

$$\begin{aligned} 0 &= k^{(s)} + \left. \frac{\partial k}{\partial \Delta\varepsilon_p} \right|_{(s)} \delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} + \left. \frac{\partial k}{\partial \Delta\varepsilon_q} \right|_{(s)} \delta\Delta\varepsilon_q^{(s)} + \left. \frac{\partial k}{\partial f} \right|_{(s)} \delta f^{(s)} + \\ &\quad + \left. \frac{\partial k}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \right|_{(s)} \delta\bar{\varepsilon}^p^{(s)} + \left. \frac{\partial k}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} \right|_{(s)} \delta\dot{\bar{\varepsilon}}^p^{(s)} + \left. \frac{\partial k}{\partial \theta} \right|_{(s)} \delta\theta^{(s)} \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} -\Delta\varepsilon_p^{(s)} \Phi_q^{(s)} - \Delta\varepsilon_q^{(s)} \Phi_p^{(s)} &= \Phi_q^{(s)} \delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} + \Delta\varepsilon_p^{(s)} [\Phi_{qp}^{(s)} \delta p^{(s)} + \Phi_{qq}^{(s)} \delta q^{(s)} + \\ &\quad + \Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} \left(\left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \right|_{(s)} \delta\bar{\varepsilon}^p^{(s)} + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} \right|_{(s)} \delta\dot{\bar{\varepsilon}}^p^{(s)} + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right|_{(s)} \delta\theta^{(s)} \right) + \Phi_{qf}^{(s)} \delta f^{(s)}] + \delta\Delta\varepsilon_q^{(s)} \Phi_p^{(s)} + \\ &\quad + \Delta\varepsilon_q^{(s)} \left[\Phi_{pp}^{(s)} \delta p^{(s)} + \Phi_{pq}^{(s)} \delta q^{(s)} + \Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \left(\left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \right|_{(s)} \delta\bar{\varepsilon}^p^{(s)} + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} \right|_{(s)} \delta\dot{\bar{\varepsilon}}^p^{(s)} + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right|_{(s)} \delta\theta^{(s)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{pf}^{(s)} \delta f^{(s)} \right] \end{aligned}$$

Agrupando términos e introduciendo $h_{\alpha j}^{(s)}$ de (6.2), los valores $B_{10}^{(s)}$, $A_{11}^{(s)}$ y $A_{12}^{(s)}$ de 3.98 son igual a:

$$B_{10}^{(s)} = -\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_q^{(s)} - \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_p^{(s)} - \left[3\alpha K \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{qp}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{pp}^{(s)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta}\bigg|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) \right] h_{20}^{(s)} - \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{qf}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{pf}^{(s)} \right) h_{30}^{(s)} - \\ - \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\bigg|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{40}^{(s)} - \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\bigg|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{50}^{(s)}$$

$$A_{11}^{(s)} = \Phi_q^{(s)} + K\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{qp}^{(s)} + K\Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{pp}^{(s)} + \left[3\alpha K \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{qp}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{pp}^{(s)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta}\bigg|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) \right] h_{21}^{(s)} + \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{qf}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{pf}^{(s)} \right) h_{31}^{(s)} + \\ + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\bigg|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{41}^{(s)} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\bigg|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{51}^{(s)}$$

$$A_{12}^{(s)} = \Phi_p^{(s)} - 3G\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{qq}^{(s)} - 3G\Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{pq}^{(s)} + \left[3\alpha K \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{qp}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{pp}^{(s)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta}\bigg|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) \right] h_{22}^{(s)} + \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{qf}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{pf}^{(s)} \right) h_{32}^{(s)} + \\ + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\bigg|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{42}^{(s)} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\bigg|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{52}^{(s)}$$

con Φ_q igual a $\partial\Phi/\partial q$, Φ_p igual a $\partial\Phi/\partial p$, Φ_{pq} igual a $\partial^2\Phi/\partial p\partial q$ etc \dots

La condición de consistencia linealizada de (3.95) en (s) es igual a:

$$\Phi^{(s)} + \frac{\partial\Phi}{\partial p}\bigg|_{(s)} \delta p^{(s)} + \frac{\partial\Phi}{\partial q}\bigg|_{(s)} \delta q^{(s)} + \frac{\partial\Phi}{\partial f}\bigg|_{(s)} \delta f^{(s)} + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\sigma}}\bigg|_{(s)} \delta\bar{\sigma}^{(s)} = 0 \\ -\Phi^{(s)} = K\Phi_p^{(s)} \left(\delta\Delta\varepsilon_p^{(s)} + 3\alpha\delta\theta^{(s)} \right) - 3G\Phi_q^{(s)}\delta\Delta\varepsilon_q^{(s)} + \Phi_f^{(s)}\delta f^{(s)} \\ + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \left[\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\bigg|_{(s)} \delta\bar{\varepsilon}^p^{(s)} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\bigg|_{(s)} \delta\bar{\varepsilon}^p^{(s)} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta}\bigg|_{(s)} \delta\theta^{(s)} \right]$$

y los valores $B_{20}^{(s)}$, $A_{21}^{(s)}$ y $A_{22}^{(s)}$ de 3.99:

$$\begin{aligned}
B_{20}^{(s)} &= -\Phi^{(s)} - \left[3\alpha K \Phi_p^{(s)} + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right]_{(s)} h_{20}^{(s)} - \Phi_f^{(s)} h_{30}^{(s)} - \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \bigg|_{(s)} h_{40}^{(s)} - \\
&\quad - \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \bigg|_{(s)} h_{50}^{(s)} \\
A_{21}^{(s)} &= K \Phi_p^{(s)} + \left[3\alpha K \Phi_p^{(s)} + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right]_{(s)} h_{21}^{(s)} + \Phi_f^{(s)} h_{31}^{(s)} + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \bigg|_{(s)} h_{41}^{(s)} + \\
&\quad + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \bigg|_{(s)} h_{51}^{(s)} \\
A_{22}^{(s)} &= -3G \Phi_q^{(s)} + \left[3\alpha K \Phi_p^{(s)} + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right]_{(s)} h_{22}^{(s)} + \Phi_f^{(s)} h_{32}^{(s)} + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \bigg|_{(s)} h_{42}^{(s)} + \\
&\quad + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \bigg|_{(s)} h_{52}^{(s)}
\end{aligned}$$

con Φ_p igual a $\partial \Phi / \partial p$ y Φ_q igual a $\partial \Phi / \partial q$ etc...

ANEXO 3: Modelo de Gurson para problemas termo-viscoplásticos. Obtención del Jacobiano

Leyes de evolución del material

La evolución de las variables de estado $\delta\rho$, $\delta\theta$, δf , $\delta\bar{\varepsilon}^p$, $\delta\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ cumplen la ecuación (3.111):

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta\rho &= h_{11}\delta\Delta\varepsilon_p + h_{12}\delta\Delta\varepsilon_q + h_{13}\delta p^{trial} + h_{14}\delta q^{trial} \\ \text{b) } \delta\theta &= h_{21}\delta\Delta\varepsilon_p + h_{22}\delta\Delta\varepsilon_q + h_{23}\delta p^{trial} + h_{24}\delta q^{trial} \\ \text{c) } \delta f &= h_{31}\delta\Delta\varepsilon_p + h_{32}\delta\Delta\varepsilon_q + h_{33}\delta p^{trial} + h_{34}\delta q^{trial} \\ \text{d) } \delta\bar{\varepsilon}^p &= h_{41}\delta\Delta\varepsilon_p + h_{42}\delta\Delta\varepsilon_q + h_{43}\delta p^{trial} + h_{44}\delta q^{trial} \\ \text{e) } \delta\dot{\bar{\varepsilon}}^p &= h_{51}\delta\Delta\varepsilon_p + h_{52}\delta\Delta\varepsilon_q + h_{53}\delta p^{trial} + h_{54}\delta q^{trial} \end{aligned}$$

con coeficientes $h_{\alpha i}$ calculados a continuación:

a) Variación de la densidad

$$\delta(\Delta\rho + \rho\mathbf{\Delta\varepsilon} : \mathbf{1}) = \delta\rho(1 + \mathbf{\Delta\varepsilon} : \mathbf{1}) + \rho\delta\varepsilon_{kk} = 0$$

Despejando $\delta\rho$ se obtiene:

$$\delta\rho = -\frac{\rho}{(1 + \mathbf{\Delta\varepsilon} : \mathbf{1})}\delta\varepsilon_{kk}$$

A partir de la relación $\delta p^{trial} = -K\delta\varepsilon_{kk}$.

la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\delta\rho = \frac{\rho}{(1 + \mathbf{\Delta\varepsilon} : \mathbf{1})K}\delta p^{trial}$$

y las constantes h_{11} , h_{12} , h_{13} y h_{14} de (6.2) quedan igual a :

$$h_{11} = 0, \quad h_{12} = 0, \quad h_{13} = \frac{\rho}{(1 + \Delta \varepsilon : \mathbf{1}) K}, \quad h_{14} = 0$$

b) Variación de la temperatura por disipación plástica

Diferenciando la ecuación (3.78):

$$\delta \rho C_p \Delta \theta + \rho C_p \delta \theta = X [\delta q \Delta \varepsilon_q + q \delta \Delta \varepsilon_q - \delta p \Delta \varepsilon_p - p \delta \Delta \varepsilon_p]$$

e introduciendo la relación (3.107) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \delta \rho C_p \Delta \theta + \rho C_p \delta \theta = X [\Delta \varepsilon_q (\delta q^{trial} - 3G \delta \Delta \varepsilon_q) + q \delta \Delta \varepsilon_q - \\ - \Delta \varepsilon_p (\delta p^{trial} + K \delta \Delta \varepsilon_p + 3\alpha K \delta \theta) - p \delta \Delta \varepsilon_p] \end{aligned}$$

y los valores de (6.2) y agrupando términos:

$$\begin{aligned} \delta \theta = & -\frac{X(K \Delta \varepsilon_p + p)}{\rho C_p + 3X\alpha K \Delta \varepsilon_p} \delta \Delta \varepsilon_p - \frac{X(3G \Delta \varepsilon_q - q)}{\rho C_p + 3X\alpha K \Delta \varepsilon_p} \delta \Delta \varepsilon_q \\ & - \frac{X \Delta \varepsilon_p + C_p \Delta \theta h_{13}}{\rho C_p + 3X\alpha K \Delta \varepsilon_p} \delta p^{trial} + \frac{X \Delta \varepsilon_q}{\rho C_p + 3X\alpha K \Delta \varepsilon_p} \delta q^{trial} \\ h_{21} = & \frac{-X(K \Delta \varepsilon_p + p)}{\rho C_p + 3X\alpha K \Delta \varepsilon_p} & h_{22} = & \frac{-X(3G \Delta \varepsilon_q - q)}{\rho C_p + 3X\alpha K \Delta \varepsilon_p} \\ h_{23} = & -\frac{X \Delta \varepsilon_p + C_p \Delta \theta h_{13}}{\rho C_p + 3X\alpha K \Delta \varepsilon_p} & h_{24} = & \frac{X \Delta \varepsilon_q}{\rho C_p + 3X\alpha K \Delta \varepsilon_p} \end{aligned}$$

c) Evolución de la porosidad por nucleación y crecimiento

Asumiendo A y B constantes:

$$\begin{aligned} \delta(\Delta f - (1 - f) \Delta \varepsilon_p - A \Delta \bar{\varepsilon}^p - B(\Delta \bar{\sigma} - \Delta p)) &= 0 \\ \delta f(1 + \Delta \varepsilon_p) - (1 - f) \delta \Delta \varepsilon_p - A \delta \bar{\varepsilon}^p - B \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \delta \bar{\varepsilon}^p + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} \delta \dot{\bar{\varepsilon}}^p + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \delta \theta - \delta p \right) &= 0 \end{aligned}$$

la derivada de f puede escribirse, en función del resto de variables de las que depende, como:

$$\begin{aligned} \delta f = & \frac{1 - f + BK}{1 + \Delta \varepsilon_p} \delta \Delta \varepsilon_p + \frac{B}{1 + \Delta \varepsilon_p} \delta p^{trial} + \frac{A + B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p}}{1 + \Delta \varepsilon_p} \delta \bar{\varepsilon}^p + \\ & + \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p}}{1 + \Delta \varepsilon_p} \delta \dot{\bar{\varepsilon}}^p + \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} + 3\alpha K}{1 + \Delta \varepsilon_p} \delta \theta \end{aligned}$$

d) Variación de $\bar{\varepsilon}^p$

$\delta\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ se relaciona con $\delta\bar{\varepsilon}^p$ de la forma:

$$\delta\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{\delta\bar{\varepsilon}^p}{\Delta t}$$

siendo el valor Δt conocido.

e) Equivalencia del trabajo plástico

$$\begin{aligned} & -\delta f \bar{\sigma} (\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) + (1-f)(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \delta \bar{\varepsilon}^p + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} \delta \dot{\bar{\varepsilon}}^p + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \delta \theta \right] + \\ & + (1-f) \bar{\sigma} \delta \bar{\varepsilon}^p = -\Delta \varepsilon_p \delta p - p \delta \Delta \varepsilon_p + \Delta \varepsilon_q \delta q + q \delta \Delta \varepsilon_q \end{aligned}$$

Introduciendo las relaciones (3.107), (6.2) y (6.2), los parámetros h_{41} , h_{42} , h_{43} y h_{44} toman los valores:

$$\begin{aligned} DEN = (1-f) \bar{\sigma} + (1-f)(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} - \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \left[\frac{A + B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p}}{1 + \Delta \varepsilon_p} + \right. \\ \left. \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p}}{(1 + \Delta \varepsilon_p) \Delta t} \right] + (1-f)(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} \frac{1}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{41} = \frac{1}{DEN} \left[\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \left(\frac{1-f+BK}{1+\Delta \varepsilon_p} + \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K}{1+\Delta \varepsilon_p} h_{21} \right) - \right. \\ \left. -(p + K \Delta \varepsilon_p) - \left((1-f)(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K \Delta \varepsilon_p \right) h_{21} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{42} = \frac{1}{DEN} \left[\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K}{1 + \Delta \varepsilon_p} h_{22} - (3G \Delta \varepsilon_q - q) - \right. \\ \left. - \left((1-f)(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K \Delta \varepsilon_p \right) h_{22} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{43} = \frac{1}{DEN} \left[\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K}{1 + \Delta \varepsilon_p} h_{23} + \frac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p)}{1 + \Delta \varepsilon_p} B - \Delta \varepsilon_p - \right. \\ \left. - \left((1-f)(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K \Delta \varepsilon_p \right) h_{23} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{44} = \frac{1}{DEN} \left[\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{B \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K}{1 + \Delta \varepsilon_p} h_{24} + \Delta \varepsilon_q - \right. \\ \left. - \left((1-f)(\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_t^p) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K \Delta \varepsilon_p \right) h_{24} \right] \end{aligned}$$

y los parámetros h_{31} , h_{32} , h_{33} y h_{34} de δf :

$$\begin{aligned} h_{31} &= \frac{1-f+BK}{1+\Delta\varepsilon_p} + \frac{B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial T}+3\alpha K}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{21} + \frac{A+B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{41} + \frac{B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{51} \\ h_{32} &= \frac{B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial T}+3\alpha K}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{22} + \frac{A+B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{42} + \frac{B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{52} \\ h_{33} &= \frac{B}{1+\Delta\varepsilon_p} + \frac{B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial T}+3\alpha K}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{23} + \frac{A+B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{43} + \frac{B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{53} \\ h_{34} &= \frac{B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial T}+3\alpha K}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{24} + \frac{A+B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{44} + \frac{B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}}{1+\Delta\varepsilon_p}h_{54} \end{aligned}$$

y h_{51} , h_{52} , h_{53} y h_{54} de $\delta\dot{\bar{\varepsilon}}^p$:

$$\begin{aligned} h_{51} &= \frac{1}{\Delta t}h_{41} \\ h_{52} &= \frac{1}{\Delta t}h_{42} \\ h_{53} &= \frac{1}{\Delta t}h_{43} \\ h_{54} &= \frac{1}{\Delta t}h_{44} \end{aligned}$$

A partir de la función (3.65):

$$g \equiv \Delta\varepsilon_p \frac{\partial\Phi}{\partial q} + \Delta\varepsilon_q \frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0$$

y su derivada:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial\Delta\varepsilon_p}\delta\Delta\varepsilon_p + \frac{\partial g}{\partial\Delta\varepsilon_q}\delta\Delta\varepsilon_q + \frac{\partial g}{\partial p}\delta p + \frac{\partial g}{\partial q}\delta q + \frac{\partial g}{\partial f}\delta f + \\ &+ \frac{\partial g}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\delta\bar{\varepsilon}^p + \frac{\partial g}{\partial\dot{\bar{\varepsilon}}^p}\delta\dot{\bar{\varepsilon}}^p + \frac{\partial g}{\partial\theta}\delta\theta = 0 \end{aligned}$$

Utilizando las relaciones (3.107) y (6.2):

$$\begin{aligned}
& \left[\Phi_q + K (\Delta \varepsilon_p \Phi_{pq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pp}) + \left((\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K (\Delta \varepsilon_p \Phi_{pq} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pp}) \right) h_{21} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{qf} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pf}) h_{31} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{41} + \right. \\
& \left. + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{51} \right] \delta \Delta \varepsilon_p + \left[\Phi_p - 3G (\Delta \varepsilon_p \Phi_{qq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{qp}) \right. \\
& \left. + \left((\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K (\Delta \varepsilon_p \Phi_{pq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pp}) \right) h_{22} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{qf} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pf}) h_{32} + \right. \\
& \left. + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{42} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{52} \right] \delta \Delta \varepsilon_q = \\
& = - \left[(\Delta \varepsilon_p \Phi_{pq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pp}) + \left((\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K (\Delta \varepsilon_p \Phi_{pq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pp}) \right) h_{23} \right. \\
& \left. + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{qf} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pf}) h_{33} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{43} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{53} \right] \delta p^{trial} \\
& - \left[(\Delta \varepsilon_p \Phi_{qq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pq}) + \left((\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\alpha K (\Delta \varepsilon_p \Phi_{pq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pp}) \right) h_{24} \right. \\
& \left. + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{qf} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pf}) h_{34} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{44} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{54} \right] \delta q^{trial}
\end{aligned}$$

Las constantes A_{11} , A_{12} , B_{11} y B_{12} de (3.112) toman los valores:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \Phi_q + K (\Delta \varepsilon_p \Phi_{pq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pp}) + \left((\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. + 3\alpha K (\Delta \varepsilon_p \Phi_{pq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pp}) \right) h_{21} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{qf} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pf}) h_{31} + \\
& + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{41} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{51} \\
A_{12} &= \Phi_p - 3G (\Delta \varepsilon_p \Phi_{qq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{qp}) + \left((\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. + 3\alpha K (\Delta \varepsilon_p \Phi_{pq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pp}) \right) h_{22} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{qf} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pf}) h_{32} + \\
& + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{42} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{52} \\
B_{11} &= - (\Delta \varepsilon_p \Phi_{pq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pp}) - \left((\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. + 3\alpha K (\Delta \varepsilon_p \Phi_{pq} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pp}) \right) h_{23} - (\Delta \varepsilon_p \Phi_{qf} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pf}) h_{33} - \\
& - (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{43} - (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{12} = & -(\Delta\varepsilon_p\Phi_{qq} + \Delta\varepsilon_q\Phi_{pq}) - \left((\Delta\varepsilon_p\Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta\varepsilon_q\Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} + \right. \\
& + 3\alpha K (\Delta\varepsilon_p\Phi_{pq} + \Delta\varepsilon_q\Phi_{pp}) \Big) h_{24} - (\Delta\varepsilon_p\Phi_{qf} + \Delta\varepsilon_q\Phi_{pf}) h_{34} - \\
& - (\Delta\varepsilon_p\Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta\varepsilon_q\Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} h_{44} - (\Delta\varepsilon_p\Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta\varepsilon_q\Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} h_{54}
\end{aligned}$$

Derivando la función Φ (3.81) con respecto a sus variables, se obtiene:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p}\delta p + \frac{\partial\Phi}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\Phi}{\partial f}\delta f + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\sigma}} \left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\delta\bar{\varepsilon}^p + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}\delta\bar{\varepsilon}^p + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta}\delta\theta \right) = 0$$

Utilizando las relaciones (3.107) y (6.2) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
& \Phi_p\delta p^{trial} + \Phi_q\delta q^{trial} + K\Phi_p\delta\Delta\varepsilon_p - 3G\Phi_q\delta\Delta\varepsilon_q + \Phi_f(h_{31}\delta\Delta\varepsilon_p + h_{32}\delta\Delta\varepsilon_q \\
& + h_{33}\delta p^{trial} + h_{34}\delta q^{trial}) + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}(h_{41}\delta\Delta\varepsilon_p + h_{42}\delta\Delta\varepsilon_q + h_{43}\delta p^{trial} + h_{44}\delta q^{trial}) + \\
& + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p}(h_{51}\delta\Delta\varepsilon_p + h_{52}\delta\Delta\varepsilon_q + h_{53}\delta p^{trial} + h_{54}\delta q^{trial}) + \\
& + \left[3\alpha K\Phi_p + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \right] (h_{21}\delta\Delta\varepsilon_p + h_{22}\delta\Delta\varepsilon_q + h_{23}\delta p^{trial} + h_{24}\delta q^{trial}) = 0
\end{aligned}$$

y las constantes A_{21} , A_{22} , B_{21} y B_{22} de (3.113) toman los valores:

$$\begin{aligned}
A_{21} &= K\Phi_p + \left(3\alpha K\Phi_p + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \right) h_{21} + \Phi_f h_{31} + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} h_{41} + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} h_{51} \\
A_{22} &= -3G\Phi_q + \left(3\alpha K\Phi_p + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \right) h_{22} + \Phi_f h_{32} + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} h_{42} + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} h_{52} \\
B_{21} &= - \left(\Phi_p + \left(3\alpha K\Phi_p + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \right) h_{23} + \Phi_f h_{33} + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} h_{43} + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} h_{53} \right) \\
B_{22} &= - \left(\Phi_q + \left(3\alpha K\Phi_p + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \right) h_{24} + \Phi_f h_{34} + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} h_{44} + \Phi_{\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} h_{54} \right)
\end{aligned}$$

C_{11} , C_{12} , C_{21} y C_{22} de (3.119) cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{B_{21}A_{12} - B_{11}A_{22}}{A_{21}A_{12} - A_{11}A_{22}} & C_{12} &= \frac{B_{22}A_{12} - B_{12}A_{22}}{A_{21}A_{12} - A_{11}A_{22}} \\
C_{21} &= \frac{B_{21}A_{11} - B_{11}A_{21}}{A_{22}A_{11} - A_{12}A_{21}} & C_{22} &= \frac{B_{22}A_{11} - B_{12}A_{21}}{A_{22}A_{11} - A_{12}A_{21}}
\end{aligned}$$

y C_{31} y C_{32} de (3.119):

$$C_{31} = h_{21}C_{11} + h_{22}C_{21} + h_{23}$$

$$C_{32} = h_{21}C_{12} + h_{22}C_{22} + h_{24}$$

ANEXO 4: Modelo de Gurson con q_1 y q_2 dependientes de la triaxialidad. Resolución de las ecuaciones linealizadas y definición del Jacobiano

En el proceso de linealización de las ecuaciones constitutivas , los valores de $\delta H^{\alpha(s)}$ no cambian de expresión al hacer q_1 y q_2 dependientes de T , sin embargo, los valores $B_{10}^{(s)}$, $A_{11}^{(s)}$ y $A_{12}^{(s)}$ de la ecuación (3.98) se modifican para dar lugar a:

$$\begin{aligned}
 B_{10}^{(s)} = & -\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_q^{(s)} - \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_p^{(s)} - \left[3\alpha K\Delta\varepsilon_p^{(s)} \left(\Phi_{qp}^{(s)} + \Phi_{qq1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \right. \right. \\
 & \left. \Phi_{qq2}^{(s)} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + 3\alpha K\Delta\varepsilon_q^{(s)} \left(\Phi_{pp}^{(s)} + \Phi_{pq1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \right. \\
 & \left. \left. + \Phi_{pq2}^{(s)} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \Big|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) \Big] h_{20}^{(s)} - \\
 & - \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{qf}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{pf}^{(s)} \right) h_{30}^{(s)} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{40}^{(s)} - \\
 & - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)}\Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)}\Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{50}^{(s)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{11}^{(s)} = & \Phi_q^{(s)} + K\Delta\varepsilon_p^{(s)} \left(\Phi_{qp}^{(s)} + \Phi_{qq1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \Phi_{qq2}^{(s)} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + \\
& K\Delta\varepsilon_q^{(s)} \left(\Phi_{pq}^{(s)} + \Phi_{pq1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \Phi_{pq2}^{(s)} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + \\
& + \left[3\alpha K\Delta\varepsilon_p^{(s)} \left(\Phi_{qp}^{(s)} + \Phi_{qq1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \Phi_{qq2}^{(s)} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + \right. \\
& + 3\alpha K\Delta\varepsilon_q^{(s)} \left(\Phi_{pq}^{(s)} + \Phi_{pq1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \Phi_{pq2}^{(s)} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + \\
& \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \Big|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)} \Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)} \Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) \right] h_{21}^{(s)} + \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)} \Phi_{qf}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)} \Phi_{pf}^{(s)} \right) h_{31}^{(s)} + \\
& + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)} \Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)} \Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{41}^{(s)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)} \Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)} \Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{51}^{(s)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{12}^{(s)} = & \Phi_p^{(s)} - 3G\Delta\varepsilon_p^{(s)} \left(\Phi_{qq}^{(s)} + \Phi_{qq1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} \Big|_{(s)} + \Phi_{qq2}^{(s)} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} \Big|_{(s)} \right) - \\
& - 3G\Delta\varepsilon_q^{(s)} \left(\Phi_{pq}^{(s)} + \Phi_{pq1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} \Big|_{(s)} + \Phi_{pq2}^{(s)} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} \Big|_{(s)} \right) + \\
& + \left[3\alpha K\Delta\varepsilon_p^{(s)} \left(\Phi_{qp}^{(s)} + \Phi_{qq1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \Phi_{qq2}^{(s)} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + \right. \\
& + 3\alpha K\Delta\varepsilon_q^{(s)} \left(\Phi_{pq}^{(s)} + \Phi_{pq1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \Phi_{pq2}^{(s)} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + \\
& \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \Big|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)} \Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)} \Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) \right] h_{22}^{(s)} + \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)} \Phi_{qf}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)} \Phi_{pf}^{(s)} \right) h_{32}^{(s)} + \\
& + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)} \Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)} \Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{42}^{(s)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)} \left(\Delta\varepsilon_p^{(s)} \Phi_{q\bar{\sigma}}^{(s)} + \Delta\varepsilon_q^{(s)} \Phi_{p\bar{\sigma}}^{(s)} \right) h_{52}^{(s)}
\end{aligned}$$

con Φ_q igual a $\partial\Phi/\partial q$, Φ_p igual a $\partial\Phi/\partial p$, Φ_{pq} igual a $\partial^2\Phi/\partial p\partial q$, $\Phi_{qq1} = \partial^2\Phi/\partial q\partial q_1$, $\Phi_{qq2} = \partial^2\Phi/\partial q\partial q_2$ etc \dots

y los valores $B_{20}^{(s)}$, $A_{21}^{(s)}$ y $A_{22}^{(s)}$ de la ecuación (3.99).

$$\begin{aligned}
B_{20}^{(s)} &= -\Phi^{(s)} - \left[3\alpha K \left(\Phi_p^{(s)} + \Phi_{q_1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + \\
&\quad + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \Big|_{(s)} \right] h_{20}^{(s)} - \Phi_f^{(s)} h_{30}^{(s)} - \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)} h_{40}^{(s)} - \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} \Big|_{(s)} h_{50}^{(s)} \\
A_{21}^{(s)} &= K \left(\Phi_p^{(s)} + \Phi_{q_1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + \\
&\quad + \left[3\alpha K \left(\Phi_p^{(s)} + \Phi_{q_1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \Big|_{(s)} \right] h_{21}^{(s)} + \\
&\quad + \Phi_f^{(s)} h_{31}^{(s)} + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)} h_{41}^{(s)} + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} \Big|_{(s)} h_{51}^{(s)} \\
A_{22}^{(s)} &= -3G \left(\Phi_q^{(s)} + \Phi_{q_1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} \Big|_{(s)} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} \Big|_{(s)} \right) + \\
&\quad + \left[3\alpha K \left(\Phi_p^{(s)} + \Phi_{q_1}^{(s)} \frac{\partial q_1}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \Big|_{(s)} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{(s)} \right) + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \Big|_{(s)} \right] h_{22}^{(s)} + \\
&\quad + \Phi_f^{(s)} h_{32}^{(s)} + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Big|_{(s)} h_{42}^{(s)} + \Phi_{\bar{\sigma}}^{(s)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} \Big|_{(s)} h_{52}^{(s)}
\end{aligned}$$

En la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales necesarias para definir el Jacobiano los coeficientes $h_{\alpha i}$ no varían, pero sí lo hacen A_{11} , A_{12} , B_{11} , B_{12} en (3.112) :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \Phi_q + K \Delta \varepsilon_p \left(\Phi_{qp} + \Phi_{qq_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \Phi_{qq_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \\
&\quad K \Delta \varepsilon_q \left(\Phi_{pp} + \Phi_{pq_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \Phi_{pq_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \right) + [(\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + \\
&\quad + 3\alpha K \Delta \varepsilon_p \left(\Phi_{qp} + \Phi_{qq_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \Phi_{qq_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \\
&\quad + 3\alpha K \Delta \varepsilon_q \left(\Phi_{pp} + \Phi_{pq_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \Phi_{pq_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \right)] h_{21} + \\
&\quad + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{qf} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{pf}) h_{31} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{41} + (\Delta \varepsilon_p \Phi_{q\bar{\sigma}} + \Delta \varepsilon_q \Phi_{p\bar{\sigma}}) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} h_{51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{21} = & K \left(\Phi_p + \Phi_{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \\
& + \left[3\alpha K \left(\Phi_p + \Phi_{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right] h_{21} + \\
& + \Phi_f h_{31} + \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{41} + \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} h_{51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} = & -3G \left(\Phi_q + \Phi_{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} \right) + \\
& + \left[3\alpha K \left(\Phi_p + \Phi_{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right] h_{22} + \\
& + \Phi_f h_{32} + \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{42} + \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^{\dot{p}}} h_{52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{21} = & - \left(\Phi_p + \Phi_{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \right) - \\
& - \left[3\alpha K \left(\Phi_p + \Phi_{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right] h_{23} - \\
& - \Phi_f h_{33} - \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{43} - \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^{\dot{p}}} h_{53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{22} = & - \left(\Phi_q + \Phi_{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} \right) - \\
& - \left[3\alpha K \left(\Phi_p + \Phi_{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \Phi_{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right] h_{24} - \\
& - \Phi_f h_{34} - \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} h_{44} - \Phi_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^{\dot{p}}} h_{54}
\end{aligned}$$